CUDA in der Finanz- und Versicherungsbranche

Status Quo, Probleme und Perspektiven

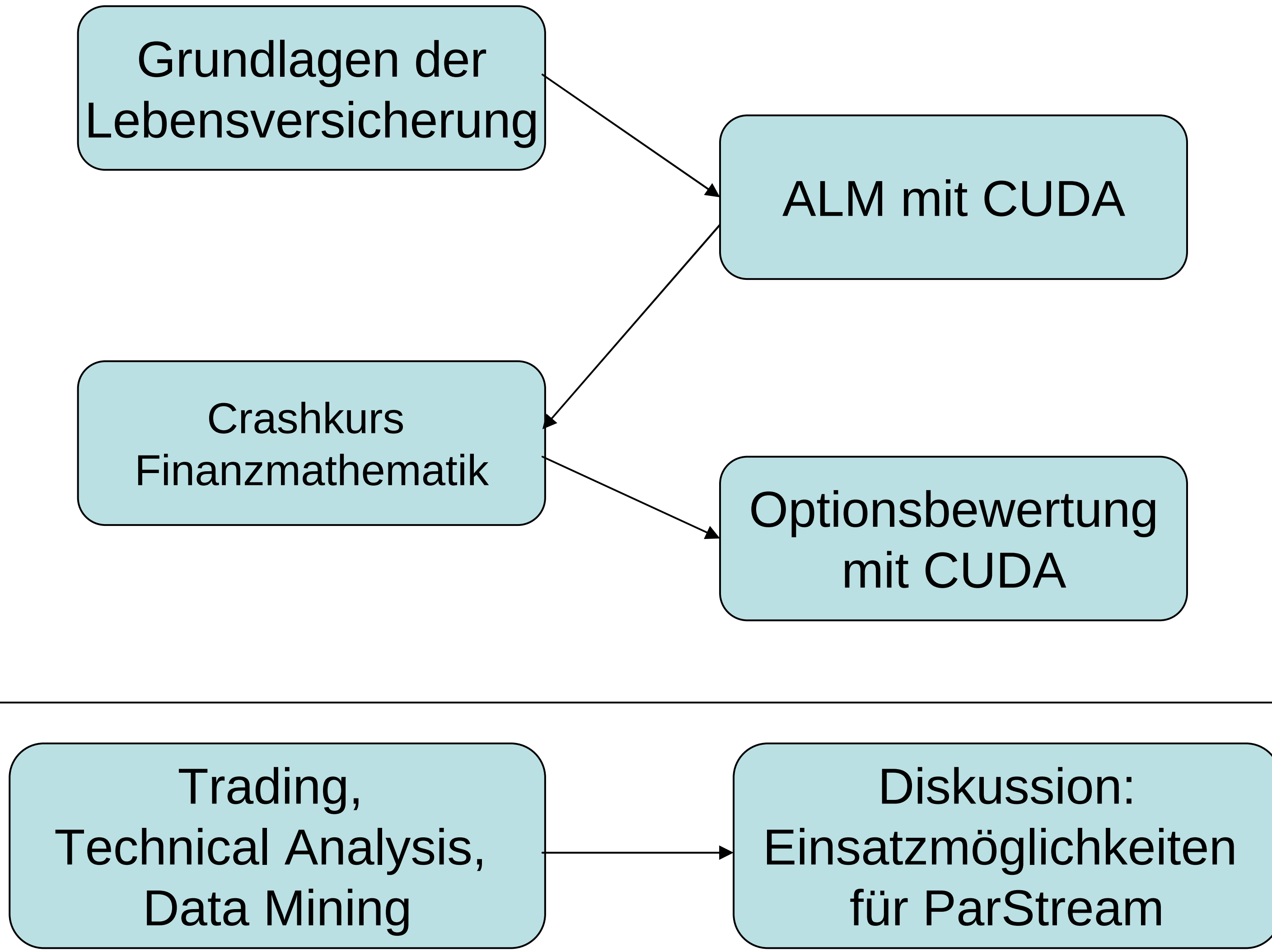
Workshop mit Empulse GmbH

Vasily „Yetanotherquant“ Nekrasov
mit Hilfe von vielen Freunden, insb. Dr. Frank Wittemann, von dem ich viel gelernt habe

Köln, die Hauptstadt der Versicherungen

9. März 2011

Agenda


Grundlagen der Lebensversicherung
ALM mit CUDA
Crashkurs Finanzmathematik
Optionsbewertung mit CUDA
Trading, Technical Analysis, Data Mining
Diskussion: Einsatzmöglichkeiten für ParStream

Lebensversicherungsgrundlagen

- Versicherung bringt Sicherheit (durch Risikoverteilung im Kollektiv)
- Moral Hazard ist stark begrenzt (keiner will sterben oder Invalide werden)
- Adverse Selektion ist jedoch ein Problem (z.B. Raucher vs. Nichtraucher)
- Äquivalenzprinzip

Leistungsbarwert = Prämienbarwert

Haupttool: die Sterbetafeln

- Beobachte viele (100.000 oder 1.000.000) neugeborenen Männer **x** und Frauen **y**
- l_x – wie viel Männer im Alter **x** immer noch leben => lassen sich die Tod- und Erlebenswahrscheinlichkeiten definieren
- Vorsichtige Kalkulation (VU solvency!).
- Zukünftige Entwicklung ist zu berücksichtigen.
- Häufig separate Sterbetafeln für Raucher und Nichtraucher.
- für Motorradfahrer, Bodybuilder, usw, jedoch keine separate Tafeln, sondern Risikozuschläge auf den Beitrag.
- Keine Sterbetafeln für Unfall[zusatzs]versicherung, sondern pauschaler Satz

Sterbetafeln: Beispiele

- DAV 1994 T und DAV 2004 R

Tote Todesfallcharakter Garantiezins

Lebende **DAV-Sterbetafel 1994 T Männer 2,25%**

Kommutationswerte

x	1000 * q_x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x	S_x	R_x	x
0	11,687	1.000.000	11.687	1.000.000,000	35.211.213,918	11.429,829	225.181,112	965.680.866,641	13.961.512,696	0
1	1,008	988.313	996	966.565,281	34.211.213,918	952,858	213.751,283	930.469.652,723	13.736.331,584	1
2	0,728	987.317	719	944.343,260	33.244.648,637	672,354	212.798,424	896.258.438,805	13.522.580,301	2
3	0,542	986.598	535	922.890,737	32.300.305,377	489,200	212.126,071	863.013.790,169	13.309.781,876	3
4	0,473	986.063	466	902.093,428	31.377.414,640	417,301	211.636,871	830.713.484,792	13.097.655,806	4
5	0,452	985.597	445	881.825,660	30.475.321,212	389,814	211.219,570	799.336.070,152	12.886.018,935	5
6	0,433	985.151	427	862.031,369	29.593.495,552	365,046	210.829,755	768.860.748,940	12.674.799,365	6
7	0,408	984.725	402	842.697,418	28.731.464,183	336,255	210.464,709	739.267.253,388	12.463.969,610	7
8	0,379	984.323	373	823.817,699	27.888.766,765	305,356	210.128,455	710.535.789,205	12.253.504,900	8
9	0,352	983.950	346	805.384,325	27.064.949,067	277,257	209.823,098	682.647.022,439	12.043.376,446	9
10	0,334	983.604	329	787.384,674	26.259.564,742	257,199	209.545,841	655.582.073,372	11.833.553,347	10
11	0,331	983.275	325	769.801,162	25.472.180,068	249,197	209.288,642	629.322.508,630	11.624.007,506	11
12	0,340	982.950	334	752.612,574	24.702.378,906	250,257	209.039,444	603.850.328,563	11.414.718,865	12
13	0,371	982.615	365	735.801,160	23.949.766,332	266,975	208.789,187	579.147.949,656	11.205.679,420	13
14	0,451	982.251	443	719.342,961	23.213.965,172	317,285	208.522,212	555.198.183,325	10.996.890,233	14
15	0,593	981.808	582	703.196,614	22.494.622,210	407,820	208.204,927	531.984.218,153	10.788.368,021	15
16	0,792	981.226	777	687.315,030	21.791.425,597	532,375	207.797,107	509.489.595,943	10.580.163,094	16
17	1,040	980.449	1.020	671.658,363	21.104.110,567	683,154	207.264,732	487.698.170,346	10.372.365,987	17
18	1,298	979.429	1.271	656.195,441	20.432.452,203	832,999	206.581,579	466.594.059,779	10.165.101,255	18
19	1,437	978.158	1.406	640.922,933	19.776.256,762	900,740	205.748,579	446.161.607,576	9.958.519,676	19
20	1,476	976.752	1.442	625.918,755	19.135.333,829	903,527	204.847,840	426.385.350,814	9.752.771,097	20
21	1,476	975.310	1.440	611.241,955	18.509.415,074	882,340	203.944,313	407.250.016,985	9.547.923,257	21

Ermittlung der Sterbetafeln

- …ist keine einfache Aufgabe(für die neugierigen: Herleitung der Sterbetafel DAV 2008 T für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter, 57 Seiten).
- Risikozuschläge sind auch nicht einfach zu ermitteln: man könnte viele Faktoren berücksichtigen, aber
  - Gesetzliche Restriktionen (z.B. Diskrimination durch Nationalität ist verboten)
  - Kunde wird nicht den 100-seitigen Fragebogen ausfüllen (100-seitig ist übertrieben aber die Hefte sind schon heftig).

Überlegung

Fortgeschnittenes Datamining ist eher nicht [zahlungsfähig] gefragt.

Anders kann es sein bei

- Non-life insurance (zumindest theoretisch)
- Fraud detection bei Krankenversicherung

Diese Themen betrachten wir jedoch nicht…

Sterbetafel ermittelt, was nun?

Die Wahrscheinlichkeit für einen
x-Jähringen ***n*** Jahre zu überleben

$$ {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

Die Wahrscheinlichkeit für einen ***x***-Jähringen
innerhalb von ***n*** Jahren zu sterben

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} $$

${}_nq_x$ - Andere Sicht

$$q_x := {}_1q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

$$\begin{aligned} {}_2q_x &= q_x + {}_1p_x \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_{x+1}} \\ &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+1}}{l_x} \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} \end{aligned}$$

$$ {}_1p_x \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_{x+1}} = \left({}_1p_x\right)\left({}_1q_{x+1}\right)$$

ist die Wahrscheinlichkeit im 1. Jahr zu überleben und dann im 2. zu sterben

Prämienbarwert

Versicherungsnehmer zahlt [vorschüssig, jährlich] die Prämie ***P*** während der vertraglich vereinbarter Zeit, jedoch nur solange lebt.

$$i - \text{der Garantiezins}$$

$$v := \frac{1}{1+i} - \text{der Diskontfaktor}$$

$$\text{PBW} = P({}_0p_x v^0 + {}_1p_x v^1 + \ldots + {}_{n-1}p_x v^{n-1})$$

$$= P\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} =: P\ddot{a}_{x:\bar{n}|}$$

Leistungsbarwert - Risikolebensversicherung

Stirbt die versicherte Person innerhalb von ***n*** Jahren, so bekommen die Hinterbliebenen die einmalige [nachschüssige] Leistung ***S***

$$\mathrm{LBW} = S(\overbrace{{}_0p_x}^{=1} \cdot q_x \cdot v^1 + \ldots + {}_{n-1}p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot v^n)$$

$$= S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

LBW – Kapitallebensversicherung

Leistung wie bei Risikolebensversicherung + man bekommt die Leistung ***S*** wenn man ***n*** Jahre überlebt.

$$\mathrm{LBW} = S\left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + {}_n p_x v^n\right) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Beachte: je später ***S*** ausgezahlt wird, desto besser für VU => Todesfallcharakter => „T“-Tafel

Deckungskapital (Reserven)

Am Anfang des Vertrages, d.h. bei ***t=0*** gilt

PBW = LBW

Und wenn ein Vertrag ***t>0*** Jahre besteht?

Dann betrachten wir (zum Zeitpunkt ***t***) den vergangenen und zukünftigen Prämienbarwert und (VP_t und ZP_t) sowie den vergangenen und zukünftigen

Leistungsbarwert (VL_t und ZL_t)

$$VP_t + ZP_t = VL_t + ZL_t$$

Deckungskapital (Reserven)

$$ {}_t\mathbb{V}_x = \underbrace{VP_t - VL_t}_{\text{DK retrospektiv}} = \underbrace{ZL_t - ZP_t}_{\text{DK prospektiv}} $$

In Deutschland ist es gesetzlich vorgeschrieben, das DK prospektiv zu ermitteln (wenn möglich)

Dies ist z.B. bei einer Fondgebundenen Lebensversicherung unmöglich – daher retrospektive Ermittlung

Deckungskapital (Reserven)

DK ist also

- einerseits die Reserve für zukünftige Leistungen
- der Rückkaufs- bzw. anrechenbare Wert bei Kündigung bzw. Beitragsfreistellung (Stornoabschlag wird abgezogen – nicht als Strafe sondern zum Schutz des bestehenden Versicherten)

Beispiel: DK (prospektiv) bei Kapitallebensversicherung

$$_t\mathbb{V}_x = \mathrm{LBW}_t - \mathrm{PBW}_t$$

$$= \frac{M_{x+t} - M_{(x+t)+(n-t)} + D_{(x+t)+(n-t)}}{D_{x+t}}$$

$$-P\frac{N_{x+t} - N_{(x+t)+(n-t)}}{D_{x+t}}$$

Beitragszerlegung

Bei Risikolebensversicherung sind nicht nur konstante, sondern auch variable, so genannte natürliche Prämien denkbar. Dann bleibt immer DK = 0 und für das Jahr t gilt:

$$\boxed{P_t = S\frac{l_{x+t}-l_{x+t+1}}{l_{x+t}}v}$$

Für Kapitallebensversicherung (Kapital wird aufgebaut) sind die natürliche Prämien kaum denkbar.

Beitragszerlegung

So wird die Prämie in Risiko- und Sparbeitrag zerlegt.

Im Todesfall verliert das VU $S - {}_t\mathbb{V}_x$

Barwertig zum Zeitpunkt ***t*** ist der Risikobeitrag

$$\boxed{q_{x+t}(S - {}_t\mathbb{V}_x)v}$$

Der Rest der Prämie ist der Sparbeitrag (bildet das Kapital für Erlebensfall)

Kosten

Bisher haben wir die Kosten des VU nicht berücksichtigt. Diese kann man als Leistungen interpretieren, die Formeln werden dadurch unübersichtlicher aber das Prinzip bleibt dasselbe.

Überschüsse

Wie schon erwähnt, die Prämienkalkulation erfolgt vorsichtig:

- Niedriger Garantiezins
- Hohe Sterbe-/Überlebenwahrscheinlichkeit
- Realistische Kostensätze

Es wird auch mit tatsächlichen Werten gerechnet (dieselbe Formeln, nur andere Werte).

Überschüsse

Als Differenz zwischen Rechnungsgrundlagen kalkuliert man Zins-, Risiko- und Kostenüberschüsse.

Mehr als 90% müssen den Versicherten gutgeschrieben werden (direkt oder über die RfB)

Back to CUDA

Soweit haben wir keine rechenintensiven parallelisierbaren Algorithmen gesehen => wohl kein sinnvoller Einsatz von GPUs in der ***<u>konventionellen</u>*** Lebensversicherung.

Jedoch gibt es modernere „heiße“ Themen!!!

Fondsgebunede Versicherung

Das Todesfallrisiko wird wie bei einer konventioneller Kapitallebensversicherung mit Risikobeitrag abgedeckt, der Sparbeitrag wird in Fonds investiert (normalerweise Aktien- und Anleihefonds, aber auch Derivate).

Die Erlebensleistungen sind also nicht garantiert, dafür aber ist der erwartete durchschnittliche Zins höher als der Garantiezins bei konventionellen Versicherungen.

Asset Liability Management (ALM)

Versicherungsmarkt in Deutschland, 2007

Rang	*Gesellschaft*	*Beiträge in Mio. €*
1	Allianz Leben	12.828
2	AachenMünchener	3.893
3	Zurich Deutscher Herold	3.641
4	R+V Lebensversicherung	3.379
5	Hamburg-Mannheimer LV	3.109
6	Debeka Leben	2.736
7	Volksfürsorge	2.439
8	Württembergische Leben	2.184
9	HDI-Gerling Leben	2.031
10	Victoria Leben	1.980

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Lebensversicherung#Lebensversicherungsmarkt_in_Deutschland

Asset Liability Management (ALM)

VU akkumulieren riesige Kapitalien, welche Rendite bringen müssen (theoretisch nicht niedriger als Garantiezins, in der Praxis wesentlich höher, da Konkurrenz drückt)

So wird das Kapital investiert, bei Investitionen sind aber Risiken inhärent!!

Asset Liability Management (ALM)

The aim of asset and liability management, or ALM, is to arrive at an understanding of the problems of risk (rates, exchange etc.) *across the whole balance sheet.*

Esch et al - Asset and Risk Management

Wiley, 2005

Asset Liability Management (ALM)

Man modelliert:

- Sterblichkeiten
- Aktienkurse
- Zinsdynamik
- Inflation
- ….
  Und nicht nur separat, sondern *im Zusammenhang!*

Asset Liability Management (ALM)

Wir betrachten nur die Modellierung von Aktienkursen und Zinsdynamik

Dies ist auch für das Portfoliomanagement bei den fondsgebundenen Versicherungen relevant

Stochastisches Modell für Aktienkurse – stylized facts

- Aktienkurse sind zufällig
- Langfristig wachsen die Kurse (not proven but generally accepted statement)
- Bei manchen Aktien schwanken die Kurse sehr stark (Volatilität), bei manchen weniger stark.
- Viele Faktoren beeinflussen die Kurse
- Aktienkurs kann den Boden (0.0€) erreichen aber kann nicht graben (negativ werden)

Stylized facts -> Mathematik

Sei S_t der Aktienkurs zum Zeitpunkt ***t***

Annahmen:

- Nettorendite $r_t := \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$ Normalverteilt
- Verteilungsparameter μ, σ sind konstant und von ***t*** unabhängig (gilt nicht in der Praxis, so gibt es auch die komplexeren Modelle ohne diese Annahme)
- In stetiger Zeit $$r_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

W_t - Wiener Process bzw. Brownian Motion

Exkurs: Wiener Process

- Zur jeden Zeitschnitt ***t*** ist $W_t \; N(0,t)$ verteilt
- Hat unabhängige $N(0,\Delta t)$ verteilte increments
- Ist stetig (mit Wahrscheinlichkeit 1) aber nicht diff'bar
- Ist ein Fraktal (d.h. unter der Lupe wird man keine gerade Linien sehen, sondern dasselbe Bild – egal wie stark ist die Lupe)
- Hat unbegrenzte first-order variation, d.h.

$$\lim_{max(t_{j+1}-t_j)\to 0} \sum_{j=1}^{n-1} |W(t_{j+1}) - W(t_j)| = \infty$$

- Dafür aber ist die quadratic variation zum Zeitpunkt ***t***

$$\lim_{max(t_{j+1}-t_j)\to 0} \sum_{j=1}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = t$$

Beachte:

- Nichtdiffbarkeit ist *gut* fürs Aktienkursmodell. Wäre es anders, so wäre zu jedem Zeitpunkt bekannt, ob der Kurs weiter steigt oder fällt, das ist aber unrealistisch.

- Für unit time intervals sind die Increments $N(0,1)$ verteilt. Für die Summe von i.i.d. r.v. ist die Varianz additiv, deshalb zum Zeitpunkt **t** ist der Prozesswert $N(0,t)$ verteilt

Exkurs: Zinsen in stetiger Zeit

- Mit Geldanlage B_0 und Jahreszins **r** hat man in einem Jahr $B_0(1+r)$
- Bei halbjährigen Zinsanrechnung ist es üblich entweder $B_0((1+r)^{0.5})^2 = B_0(1+r)$ oder $B_0(1+r/2)^2$ anzurechnen
- Allgemeiner für Anlagefrist **t** gilt $B_0(1+r)^t$ oder $B_0 e^{rt}$ weil $\lim_{n\to\infty}((1+r/n)^n)^t = e^{rt}$
- Für „höherer“ Finanzmathematik ist das 2. Verfahren üblich

Finanzmarkt: das einfachste Modell

Es gibt das risikolose Bankkonto bzw. der Bond und die riskante Aktie (oder Aktienindex)

$$dB_t = rB_t dt$$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

B_0, S_0 sind gegeben

Ito Formula

Quadratic Variation von W_t ist ***t***.

So $dW_t \cdot dW_t = dt$ in some sence.

$dW_t \cdot dt = 0$ und (vgl. mit Taylorreihe)

$$\boxed{df(W_t) = f^{'}(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f^{''}(W_t)dt}$$

Allgemeiner für den stochastischen Prozess S_t

$$\boxed{df(S_t) = f^{'}(S_t)dS_t + \frac{1}{2}f^{''}(S_t)(dS_t)^2}$$

Ito Formula: Anwendungsbeispiel – geometric Brownian Motion

$$d(ln(S_t)) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}(dS_t)^2 =$$

$$\frac{1}{S_t} S_t(\mu dt + \sigma dW_t) - \frac{1}{2S_t^2} S_t^2 (\mu dt + \sigma dW_t)^2 =$$

$$\mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\left(\mu^2 (dt)^2 + 2dW_t dt + \sigma^2 dt\right)$$

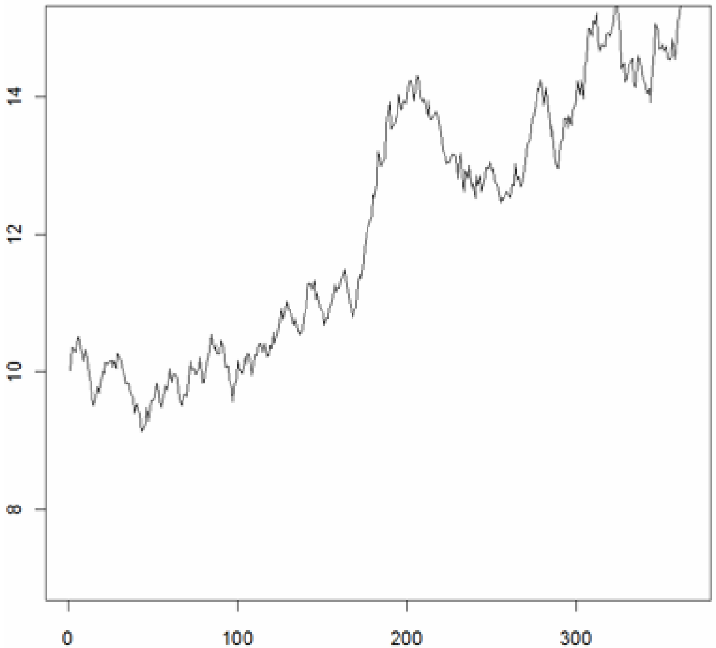
$$= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t$$

vgl. mit

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

Realisierung von exponential BM mit $\mu = 0.13, \sigma = 0.25, S_0 = 10$ vs. Lufthansa Aktienkurs



Beachte: $S_t = S_0 exp(\mu \underbrace{-0.5\sigma^2}_{(!)})t + \sigma W_t$

Vola frisst Kapitalisierung!

Noch ein stoch. Prozess – Ornstein-Uhlenbeck (Vasicek Modell für Zinsdynamik, short rate)

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma dW_t$$

Lösung dieser SDE (unter Ansatz: $d(e^{at}r_t)$)

$$r(t) = r(0)e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

Eigenschaften: Autoregressiv, Mean-Reverting und

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[r_t] = \lim_{t \to \infty} \left[r(0)e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) \right] = \frac{b}{a}$$

2 in der Praxis populäre Zinsmodelle

- CIR (Cox-Ingersoll-Rubinstein)

$$\boxed{dr_t = (a - br_t)dt + \sigma\sqrt{(r_t)}dW_t}$$

- Black-Karasinski

$$\boxed{d[ln(r_t)] = [\theta_t - \phi_t ln(r_t)]dt + \sigma_t dW_t}$$

- CIR hat SDE keine analytische Lösung, bei BK gibt es keine analytische Lösung für bond price und European call

Back to ALM

- Das einfache Modell hat analytische Lösung (schon dafür brauchten wir Stochastic Calculus).
- Das Modell ist aber wirklich ZU einfach. In der Tat:
  - Zinsen sind stochastisch (Modelle kennen wir schon)
  - Volatility ist stochastisch
  - Nicht nur BM, sondern auch Jumps treiben die Aktienpreise
  - Am Markt gibt es nicht eine, sondern tausende von *korrelierten* Aktien

$\Rightarrow$ Noch kompliziertere mathematische Modelle mit i.A. keinen analytischen Lösungen.

$\Rightarrow$ Problemlösung: Monte-Carlo Simulation

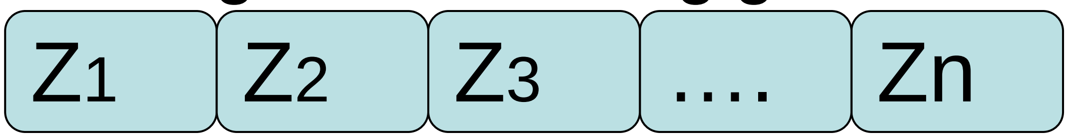
- $\Rightarrow$ Simuliere mehrmals (1 000, 10 000, 100 000 mal) die stochastische Prozesse für Zins und jede Aktie in Portfolio.
- $\Rightarrow$ Man bekommt die Verteilung des Portfoliowerts in der Zukunft und kann den Erwartungswert, Varianz, Value-at-Risk, usw berechnen

$\Rightarrow$ Hindernis: Monte-Carlo ist sehr rechenaufwendig, Konvergenzgeschwindigkeit ist etwa $O(\sqrt{(}n))$

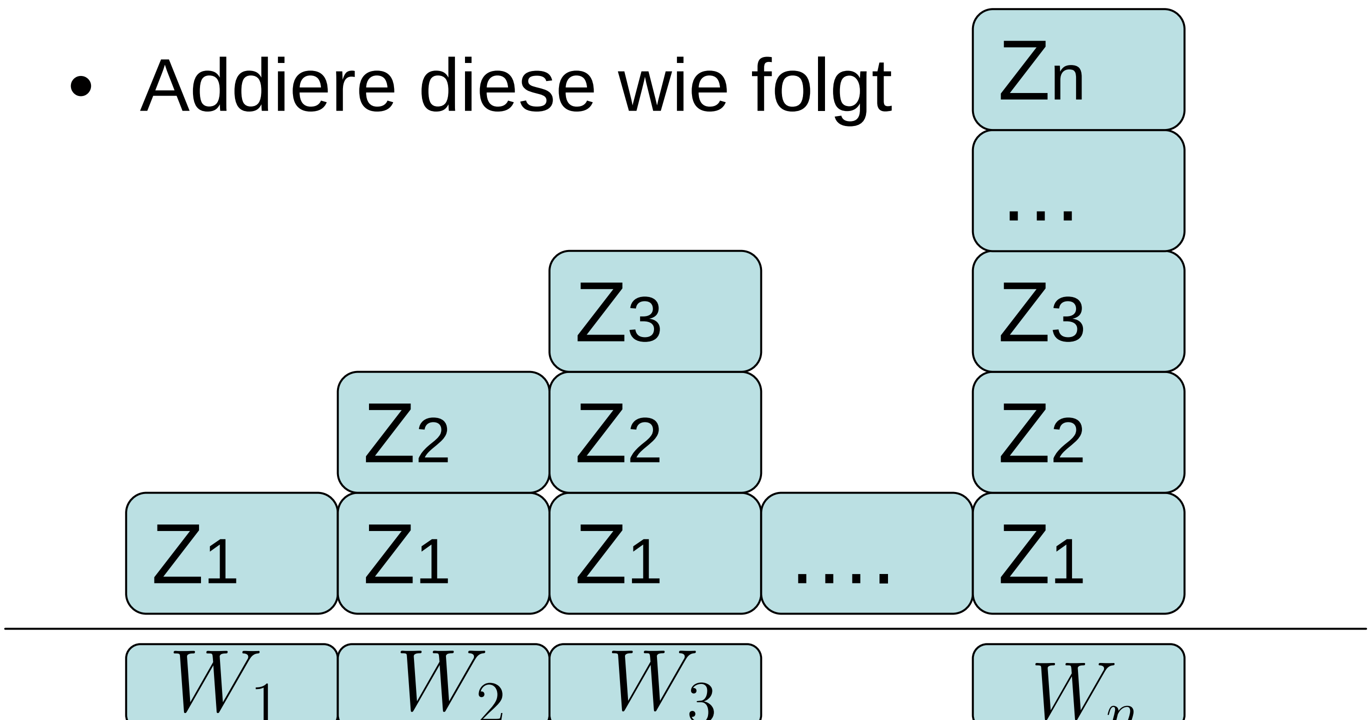
CUDA Einsatz: Parallele MC Simulation

Für Brownian Motion

- Erzeuge **n** unabhängige normalverteilte



- Addiere diese wie folgt

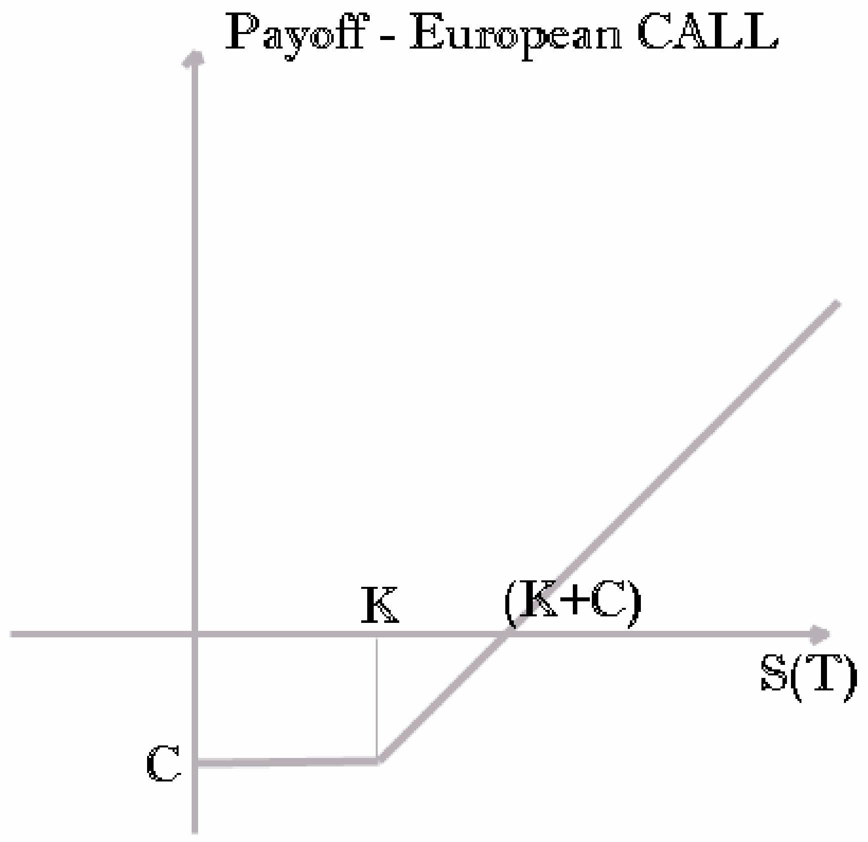


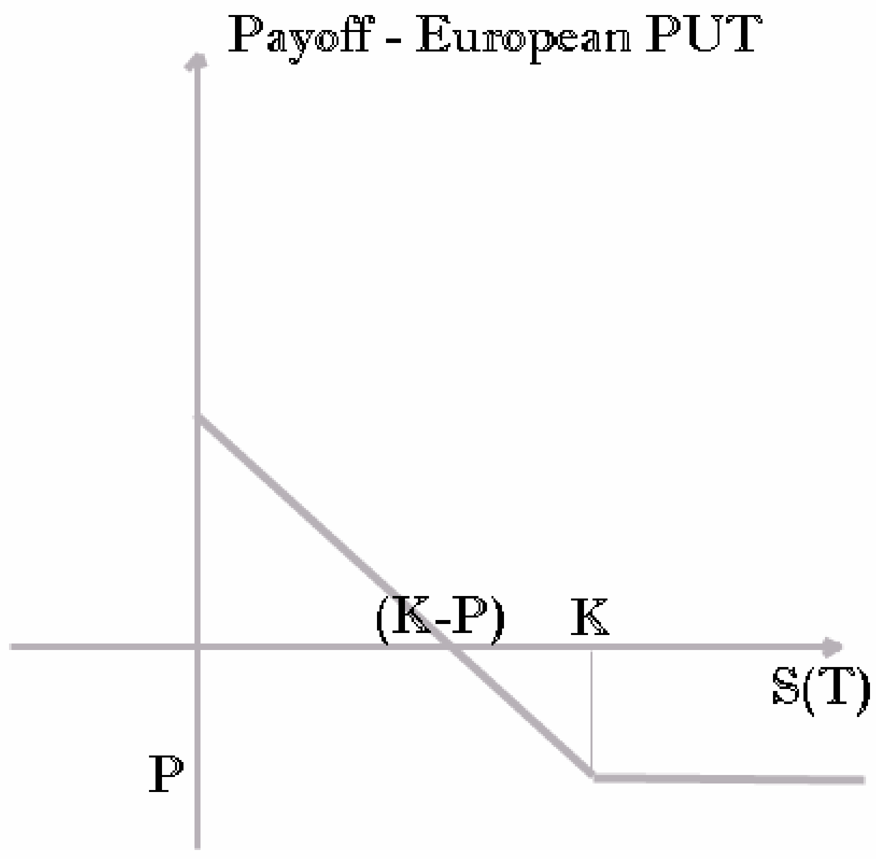
- Very straightforward (soweit man einen Zufallszahlengenerator hat)
- Sehr gut parallelisierbar
- Benutzung von single precision (float) anstatt double precision (double) ist kein großes Problem, da nur einfache Summation eingesetzt wird

Die [vanilla] Optionen

- Option ist das Recht (aber nicht die Obligation) ein Asset (Aktie, Anleihe, Option selbst) für gewissen Preis **K** (strike) zu kaufen (CALL) oder zu verkaufen (PUT).
- Nach dem maturity date **T** verfällt die Option wertlos
- Option kann man genau am **T** ausüben (European Option) oder jede Zeit bis zum **T** (American Option)
- Es gibt viele exotische Optionen mit „exotischen“ Bedingungen.

Optionen – [netto] Payoffs





No-arbitrage Prinzip

- Allgemein: es gibt kein free-lunch an dem Markt; man kann das Geld aus nichts nicht machen; zwei Portfolios mit dem gleichen zukünftigen Cashflow müssen gleichen Barwert haben; um Gewinn zu machen ist es notwendig (aber nicht ausreichend), Risiko zu übernehmen.
- U.A. im unser Modell: Maximal möglicher **risikolosen** Gewinn zum Zeitpunkt **t** unter Einsatz vom Kapital $\mathbf{K_0}$ ist $K_0(e^{rt}-1)$

Put-Call Parity

Seien **C** und **P** die European Call- und Put optionen mit gleichen Strike K und Expiry T. Dann gilt

$$\boxed{P - C = e^{-rT}K - S_0}$$

Beweis: Portfolio von (**P** – **C**) (gelesen: Put long und Call short) zahlt am **T** aus:

$$([K - S]^+ - [S - K]^+) = K - S_T$$

Portfolio aus einer Aktie **S** short und $e^{-rT}K$ im Bond zahlt zur Zeit T auch $K - S_T$ aus

Beachte: Put-Call Parity ist modellunabhängig!

Bewertung der Optionen

- Nehmen wir erstmal das einfache Modell des Finanzmarktes an.
- So ist der Barwert einer European Call gleich

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T} - K\right)^+\right]$$

???...

Dummerweise NEIN – sonst Arbitragemöglichkeit

In der Tat nicht

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T} - K\right)^+\right]$$

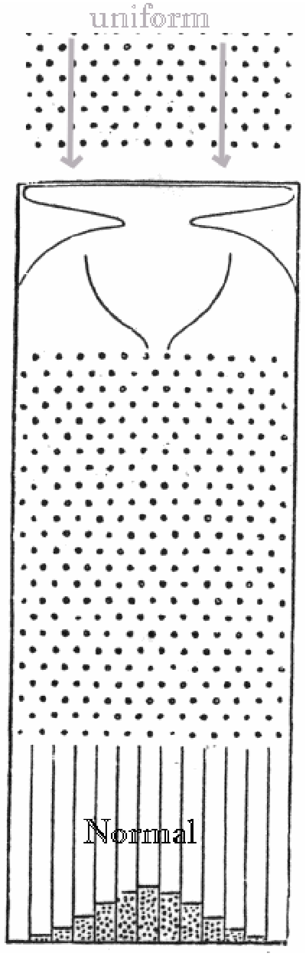
Sondern (Black-Scholes-Merton Formula)

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}\left[\left(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T} - K\right)^+\right] =$$

$$S_0 N\left(\frac{ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + Ke^{-rT}N\left(\frac{ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Also Erwartungswert unter risk-neutral measure…

Exkurs: change of measure



Nicht nur abstraktes mathematisches Konzept sondern auch als Bean Machine baubar.

Wir kommen demnächst zum risk-neutral measure in Finanzmathematik.

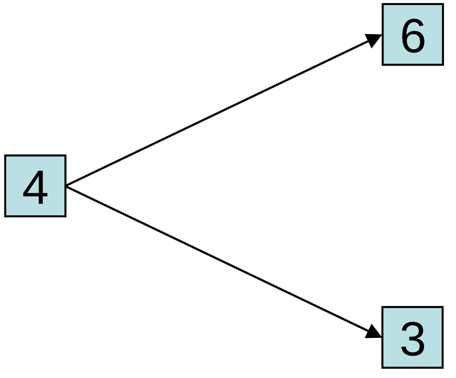
Binary trees (und der Wald dahinter)

Idee (Cox, Ross, Rubinstein): approximiere die geometrische Brownsche Bewegung in diskreter Zeit mit binären Bäumen – und gib die MBAs die Möglichkeit die Optionen zu bewerten.

Die Idee weist aber auch viele interessante theoretische Aspekte auf.

Optionsbewertung mit binary trees

Random walk on binary tree approximiert die Brownsche Bewegung. Nehmen wir an, $\mathbf{S_0}=4$ und (der zukünftiger Preis) $\mathbf{S_1}$ kann entweder 3 oder 6 sein. Mit welcher Wahrscheinlichkeit? – ist (erstmal) egal. Sei dazu $\mathbf{r}=0.05$. Was ist der Preis der Call Option mit Strike 5?



Idee: hedging strategy

Also ein Portfolio aus α Aktien und β Bonds, welche in beiden Marktzuständen den Wert der Option repliziert

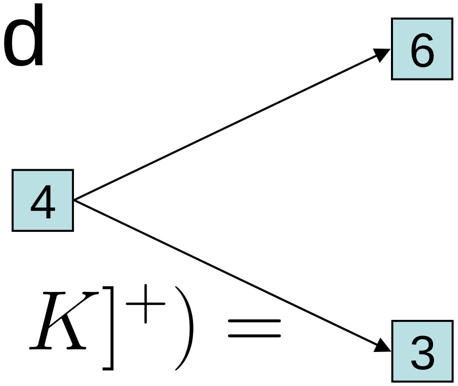
$$\begin{aligned} 6\alpha + 1.05\beta &= [6-5]^+ = 1 \\ 3\alpha + 1.05\beta &= [3-5]^+ = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} \\ \beta &= -\frac{100}{105} \end{aligned}$$

$$C_0 = 4\frac{1}{3} - \frac{100}{105} = 0.381$$

Beobachtung: mit $u := \frac{6}{4}, d := \frac{3}{4}$ und

$$\boxed{q = \frac{1+r-d}{u-d} = 0.4}$$

hat man



$$C_0 = \frac{1}{1.05}\left(q[uS_0 - K]^+ + (1-q)[dS_0 - K]^+\right) =$$

$$\frac{1}{1.05}\mathbb{E}_q[S_1 - K] = \frac{1}{1.05}\left(0.4[6-5]^+ + 0.6[3-5]^+\right) = 0.381$$

q nennt man **risk-neutral (martingale) measure**

Every discounted traded asset is martingale under q z.B.

$$\frac{1}{1.05}\mathbb{E}_q[S_1|\mathcal{F}_0] = \frac{1}{1.05}(6 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.6) = 4 = S_0$$

($\mathcal{F}_0$ ist σ-algebra (Information) zum Zeitpunkt 0)

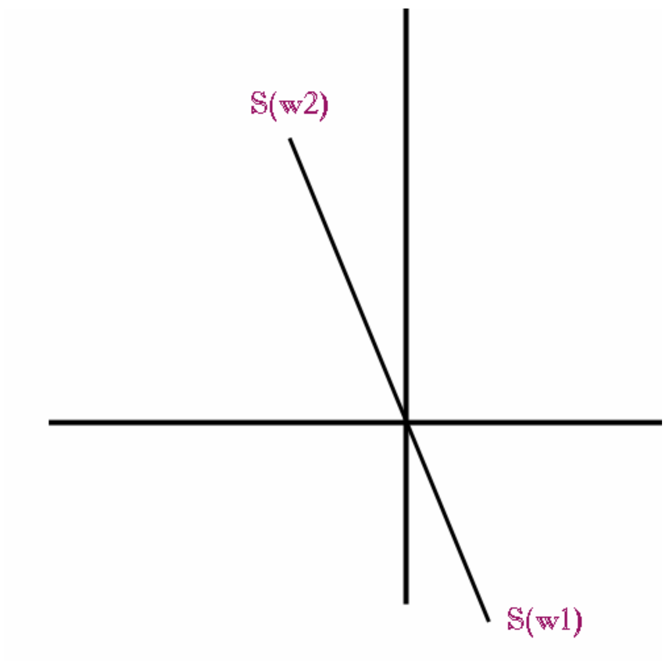
Fundamental theorems of asset pricing

- There is no arbitrage whenever an [equivalent] risk-neutral measure exists.
- The market is complete (i.e. every bounded contingent claim can be hedged) if and only if the risk-neutral measure is unique.

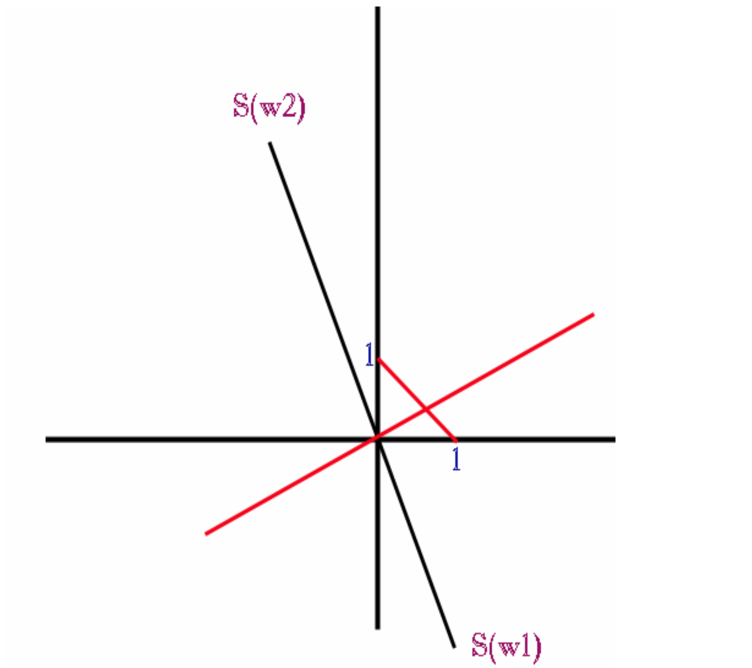
Intuition behind martingale measure - Mathematik

Für Aktienkurs sind 2 Ergebnisse möglich:

W1 – Gewinn und W2 – Verlust



Es gibt **dual space** (ortogonal) und man findet q

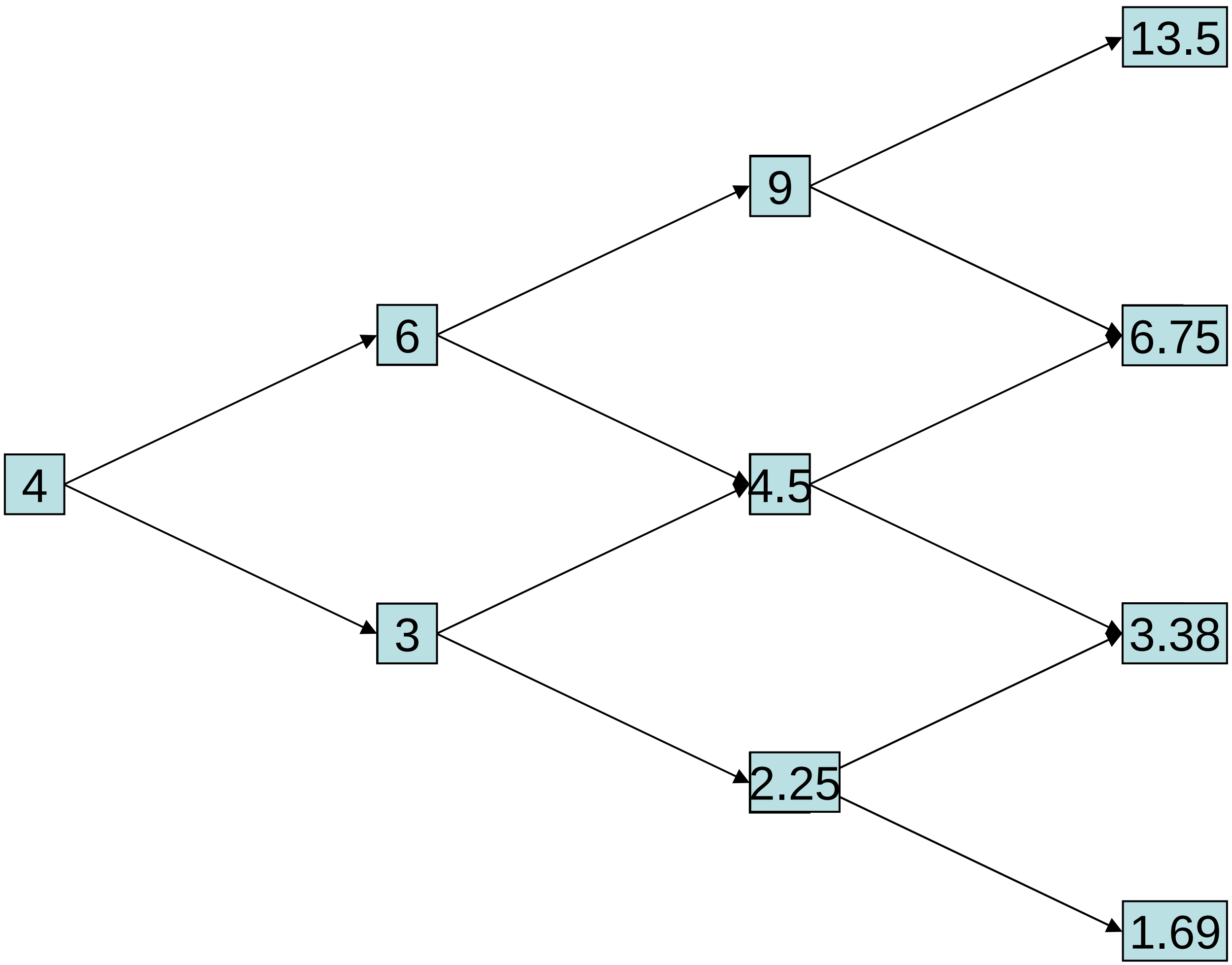


Intuition behind martingale measure - Wirtschaft

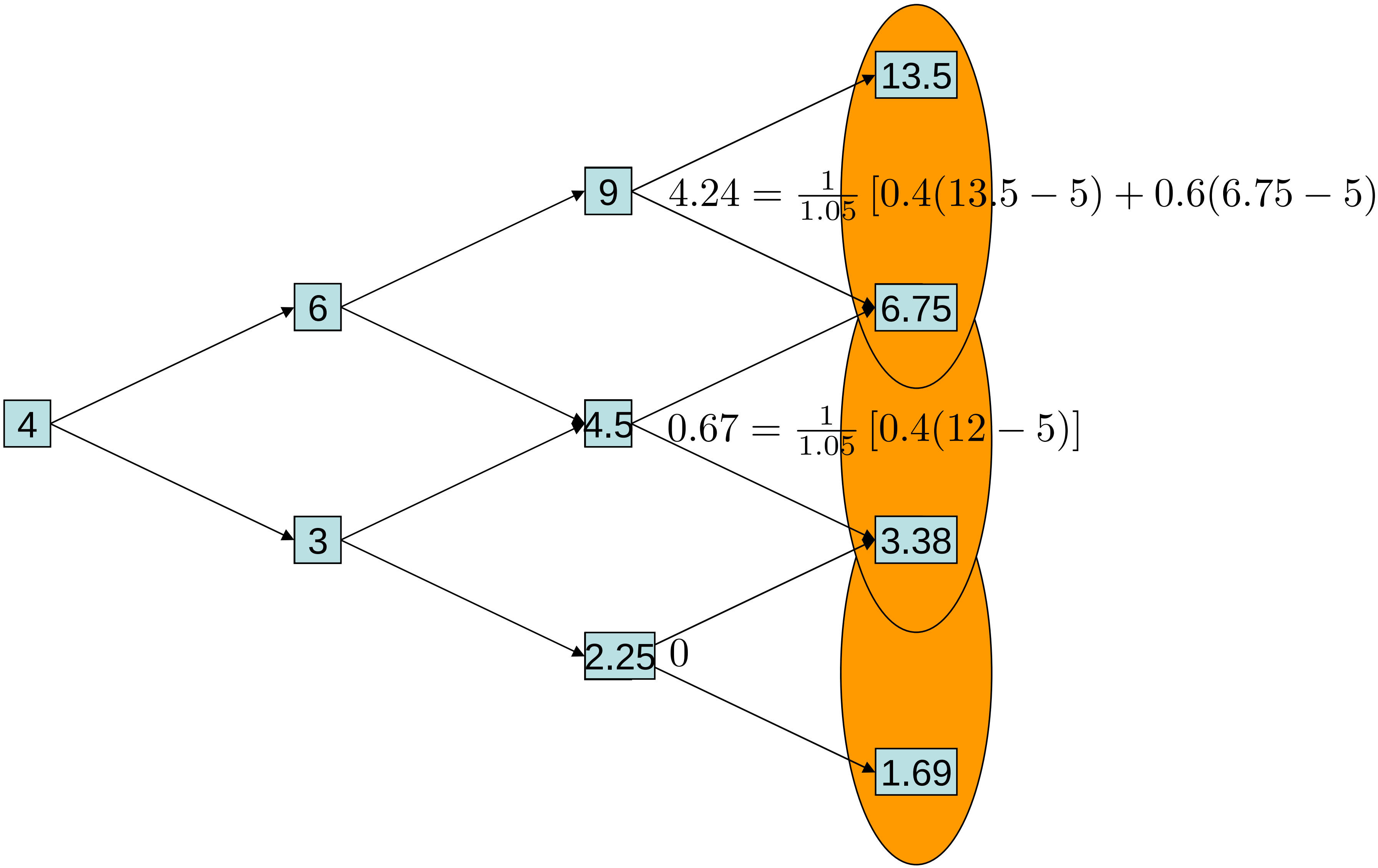
- What defines the martingale measure? **Market does!**
- Objective measure vs. Martingale measure tells us about risk preferences.
- Idealerweise sind alle Marktteilnehmer „gleich rationell“ und so haben die gleichen Risikopräferenzen => vollständiger Markt ⇔unique martingale measure

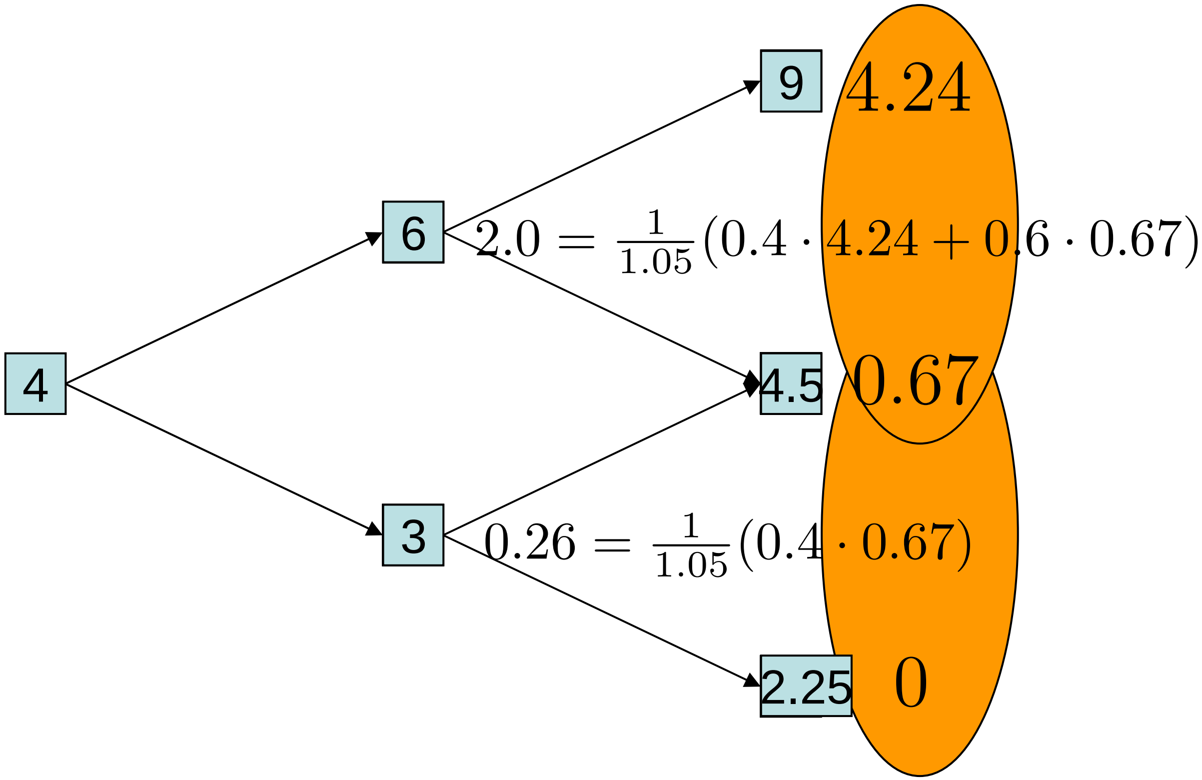
CUDA und binary trees

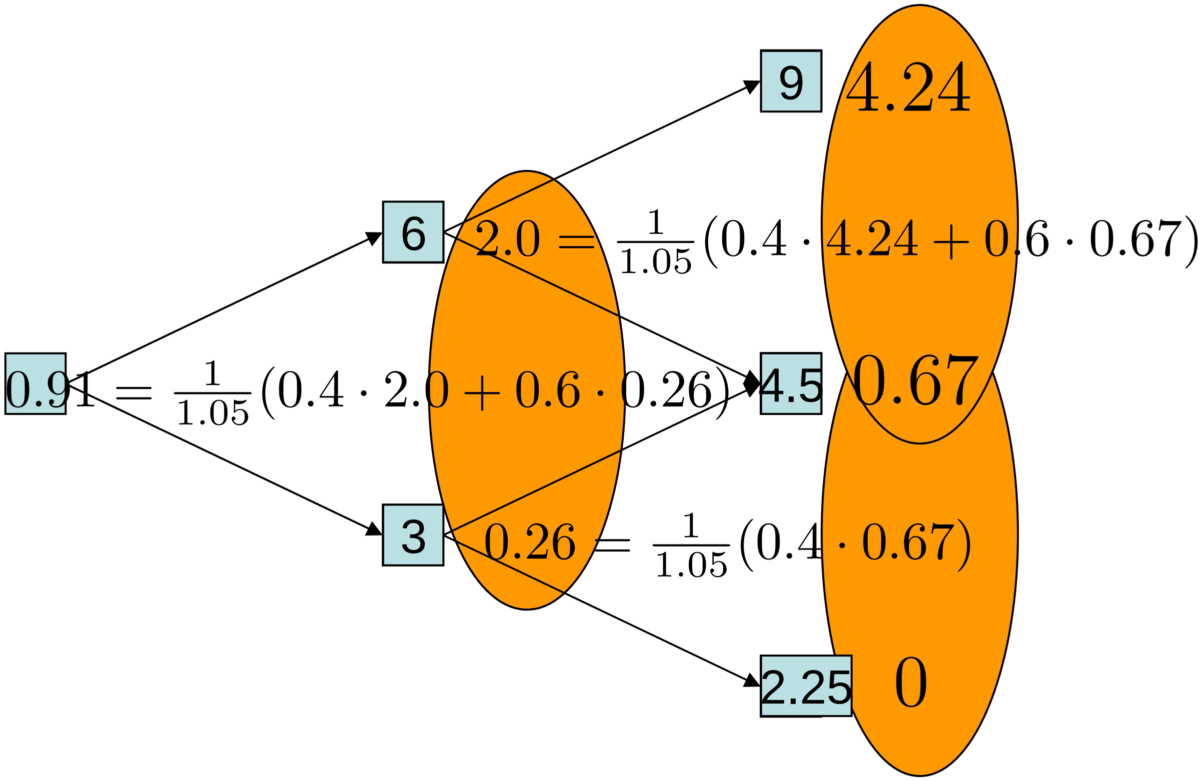
In der Praxis berechnet man rekursiv



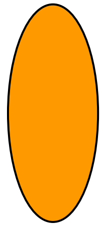
Beispiel – dieselbe Option mit K=5 aber T=3




4
6
3
9
4.5
2.25
4.24
0.67
0
$2.0 = \frac{1}{1.05}(0.4 \cdot 4.24 + 0.6 \cdot 0.67)$
$0.26 = \frac{1}{1.05}(0.4 \cdot 0.67)$



9
4.24
6
$2.0 = \frac{1}{1.05}(0.4 \cdot 4.24 + 0.6 \cdot 0.67)$
$0.91 = \frac{1}{1.05}(0.4 \cdot 2.0 + 0.6 \cdot 0.26)$
4.5
0.67
3
$0.26 = \frac{1}{1.05}(0.4 \cdot 0.67)$
2.25
0

Idee: jedes  dem eigenen Thread zuordnen

Bemerkung: nicht nur binary, sondern auch ternary trees sind gängig. Auf jeden Fall – recombinating, sonst zu rechenintensiv, sogar mir CUDA ;-)

PDE Approach – BSM Gleichung

- Hedging in stetiger Zeit. Idee: wie beim diskreten Modell – finde ein Portfolio, welches den Wert von European Call-Option C ständig repliziert.
- Betrachte ein Portfolio Π aus Option C und $-C'_S S$ Aktien (C'_S ist die Ableitung vom Optionspreis bzgl. Aktienpreises, so genannte Delta). Delta ändert sich mit der Zeit, d.h. das Portfolio wird ständig angepasst
- r, σ, μ, T beliebig aber fixed, so $C = C(t, S)$

$$dC(t,S) \overbrace{=}^{\text{Ito}} C_t' dt + C_S' dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}'' dt$$

$$d\Pi(t,S) = dC(t,S) - C_S' dS = C_t' dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}'' dt$$

Achtung! $d\Pi$ ist risikolos(keine Wirkung von dS)

So aus no-arbitrage:

$$d\Pi(t,S) = r\Pi(t,S)dt = r\left[C(t,S) - C_S' S\right] dt$$

Also kommt PDE (beachte, μ ist nicht drin):

$$\boxed{rC(t,S) = rC_S' S + C_t' dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}''}$$

Mit terminal condition $C(T, S_T) = [S_T - K]^+$

PDE Approach und CUDA

- Black-Scholes-Merton PDE kann man analytisch lösen.
- Häufig ist es so, dass man die Partielle Differential Gleichung (für American Option **Un**gleichung) aufschreiben kann aber nicht analytisch lösen.
- So verschieden numerische Methoden, bei welchen CUDA auch [irgendwie] eingesetzt werden kann

CUDA Einsatz in der Finanzbranche – Status Quo

Ein repräsentatives Bild ist schwer zu bilden, ist aber so zusammenzufassen:

- In der Finanzbranche kennt man CUDA
- Es gibt die einzelnen CUDA-basierte Lösungen aber keinen „systemischen“ Einsatz
- Gründe dazu könnten sein:
  - Es geht auch ohne CUDA ☺, langsamer aber geht
  - CUDA ist proprietary technology von NVIDIA und NVIDIA ist relativ zu klein (für z.B. Deutsche Bank)
  - Mangel an erfahrenen CUDA Entwicklern und die Schwierigkeiten beim Debugging
  - Mangelnde Marketing von NVIDIA? (z.B. isch http://www.geeks3d.com/downloads/200811/NVIDIA-CUDA-Computational-Finance-Geeks3D.pdf net besonders schee)

Fakten:

- Frage auf nuclearphynance.com
  There was pretty much talks (hype?) on CUDA, there are some topics at this forum as well. But how widely does one engage CUDA in financial world?..
- Antwort: *Dude.. CUDA is just one small tool in a very large toolbox. Not knowing CUDA will not hurt you. Just as knowing one more language will not really help you*.

Head of XXX in der Bank YYY sagt

Hallo Herr Nekrasov,

die XXX_Bank hat CUDA nicht im Einsatz. Die WestLB hat aber einiges in ihrem Zertifikategeschäft damit gemacht.
Für unseren Business Case lohnt sich eine solche proprietäre Entwicklung nicht wirklich. Wir können unsere Portfolien einfacher auf simple Cluster verteilen.

Risklab GmbH („Leib-risikomanagement“ bei Allianz)

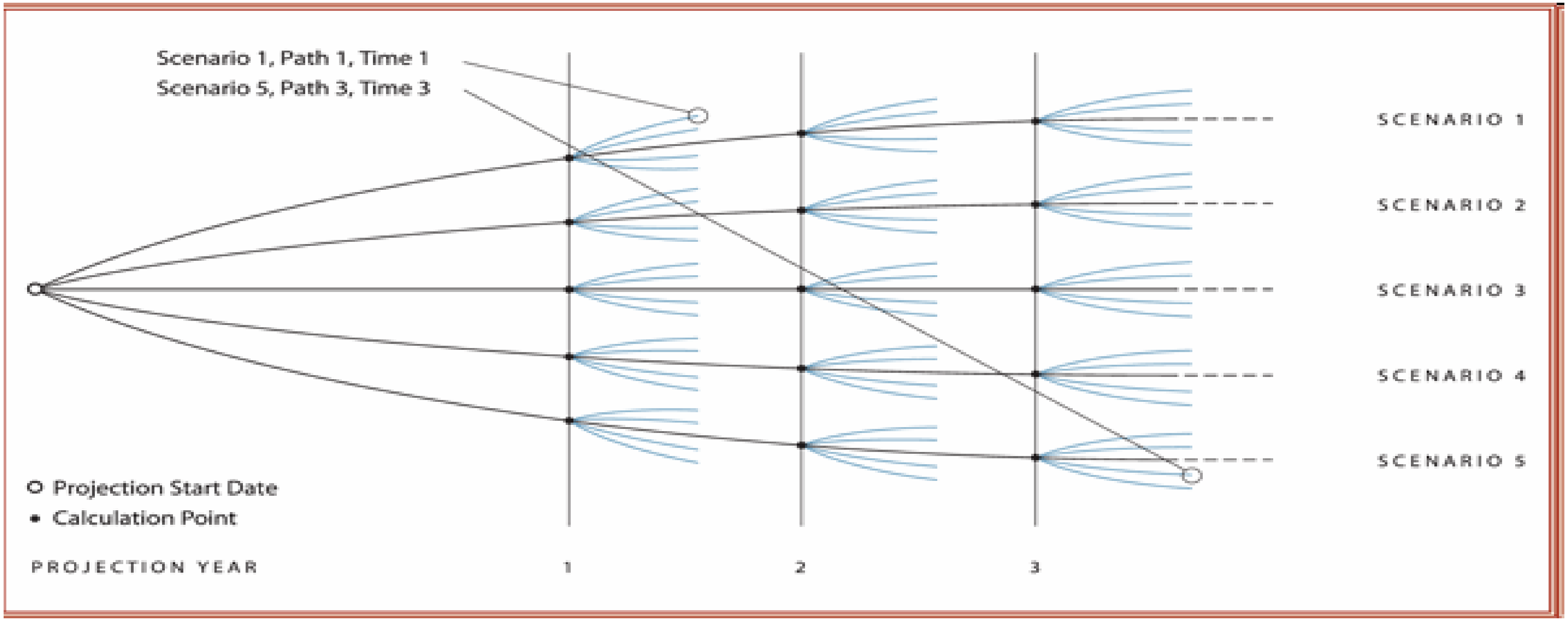
- Hat mal einen C++ Entwickler mit CUDA Kenntnissen gesucht und vielleicht gefunden.
- Aber ob Risklab was wirklich wertvolles mit CUDA geschafft hat – k.A.

Überlegungen über Marktpraxis

Für ALM simuliert man … ziemlich wenig Szenarien – sonst dauert es zu lang. Konvergenzanalyse wird auch nicht gemacht. Aber irgendwie reicht es alles – teilweise weil es fürs Aufsichtsbehörde reicht, teilweise weil der Anteil von „wilden“ Assets (die Konvergenz beeinträchtigen) normalerweise klein ist

Anderseits

Solvency II kommt!



The ability to run these types of projections and analyze the resulting information will require significant changes in the hardware and software infrastructure at most companies. Ultimately, a solution for many of these challenges will involve grid computing (linking many PCs together under common control). Some companies are already running stochastic and nested stochastic projections on grids with as many as 1,500 PCs.

(http://www.windowsfs.com/special-features/
the-actuary%E2%80%99s-high-performance-computing-challenge)

- BNP Paribas has announced production use of a small cluster
- 2 NVIDIA Tesla units (8 GPUs, each with 240 cores) replacing 250 dual-core CPUs
- factor 10x savings in power (2kW vs. 25kW)

(aus „**Financial computing on GPUs** “ von „Mike Giles “)

Hanweck Associates, LLC is a premier financial services provider specializing in risk management solutions for top-tier hedge funds, banks, broker/dealers

Fueled by cutting-edge GPU technology, Volera powers through real-time implied volatilities and greeks on the entire U.S. **OPRA** universe...with just 10 millisecond latency. (http://www.hanweckassoc.com/documents/2009-04-22%20Hanweck%20Volera%20Brochure.pdf)

Vgl. mit NVIDIA Ansatz: (http://www.nvidia.com/object/cuda_finance.html)

Analyzing the ENTIRE U.S: Option Market in Real Time. Klingt stark, kann aber irritierend (sowohl irritating als auch misleading) sein.

Für high-frequency trading ist die Performance SEHR kritisch. Das lässt vermuten, viele Hedge Fonds haben CUDA unter der Motorhaube

Nun ist es wirklich schwer aufzuklären, was bei den Hedge Fonds passiert ;-)

Diskussion

ParStream,

Technical analysis und Pattern Recognition

In Finanzmathe nahmen wir no-arbitrage an.

Der Prof. und der Trader gehen auf die Straße und sehen 100€ Geldschein.

Prof. sagt – „Unmöglich, arbitrage opportunity!“

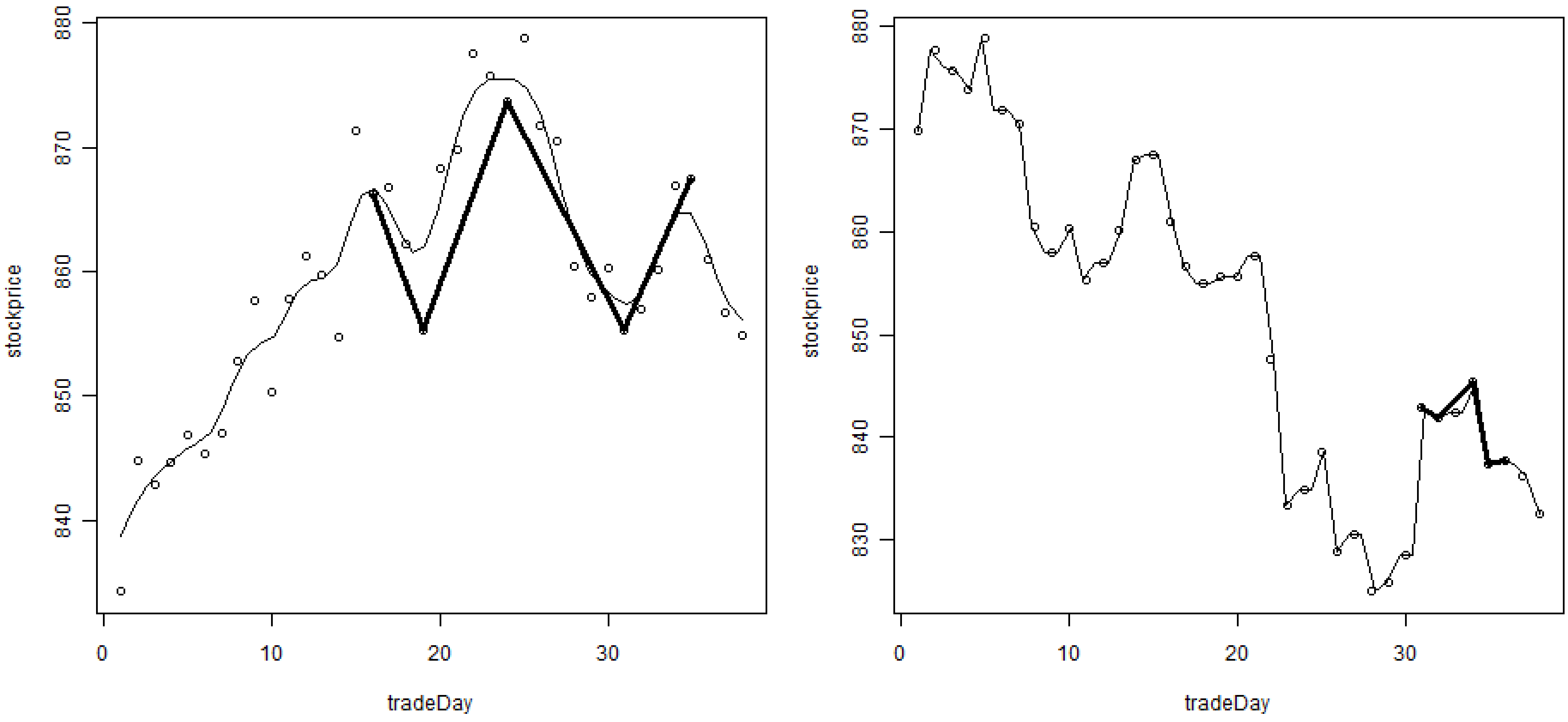
Trader nimmt schweigend das Geld.

Fragestellung

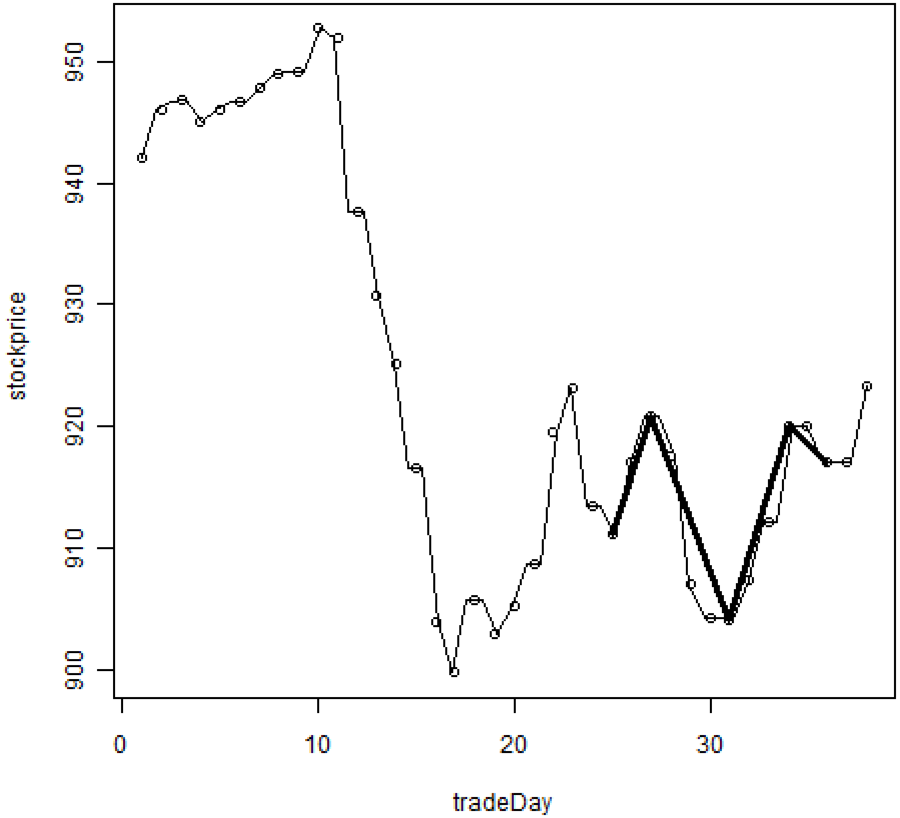
Manche glauben (und manche nicht), dass Technische Analyse profitabel sein kann.

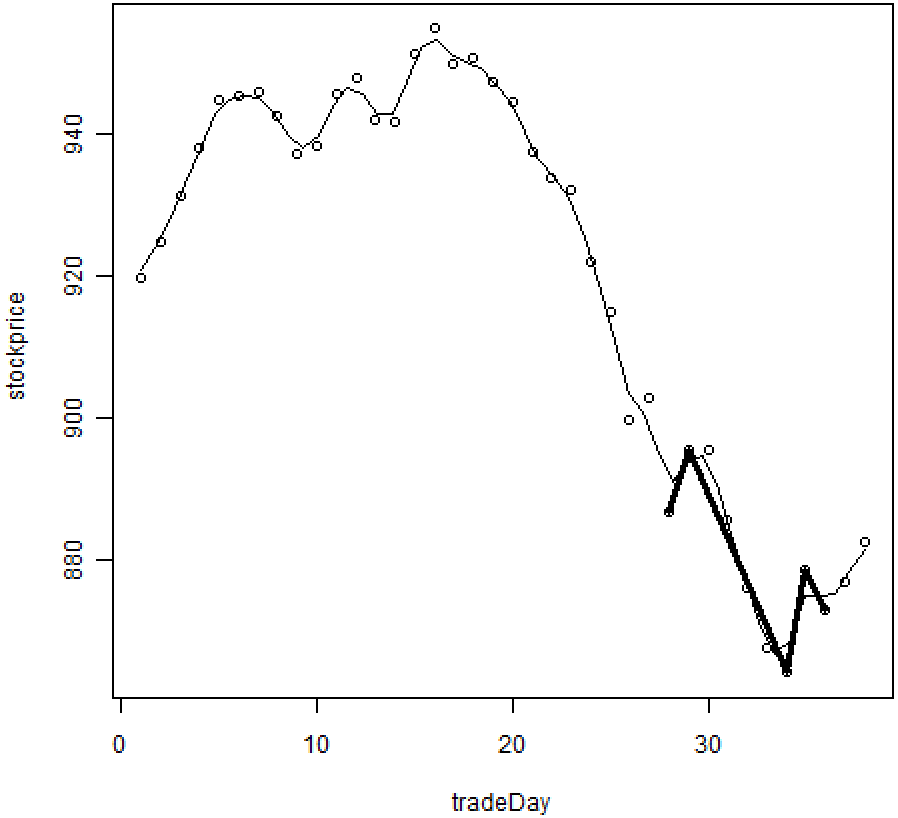
10 beliebste TA Pattens (nach Lo, Mamaysky and Wang, „Foundations of technical analysis: Computational algorithms, statistical inference, and empirical implementation“, 2000) sind

Head-and-Shoulders (HS)

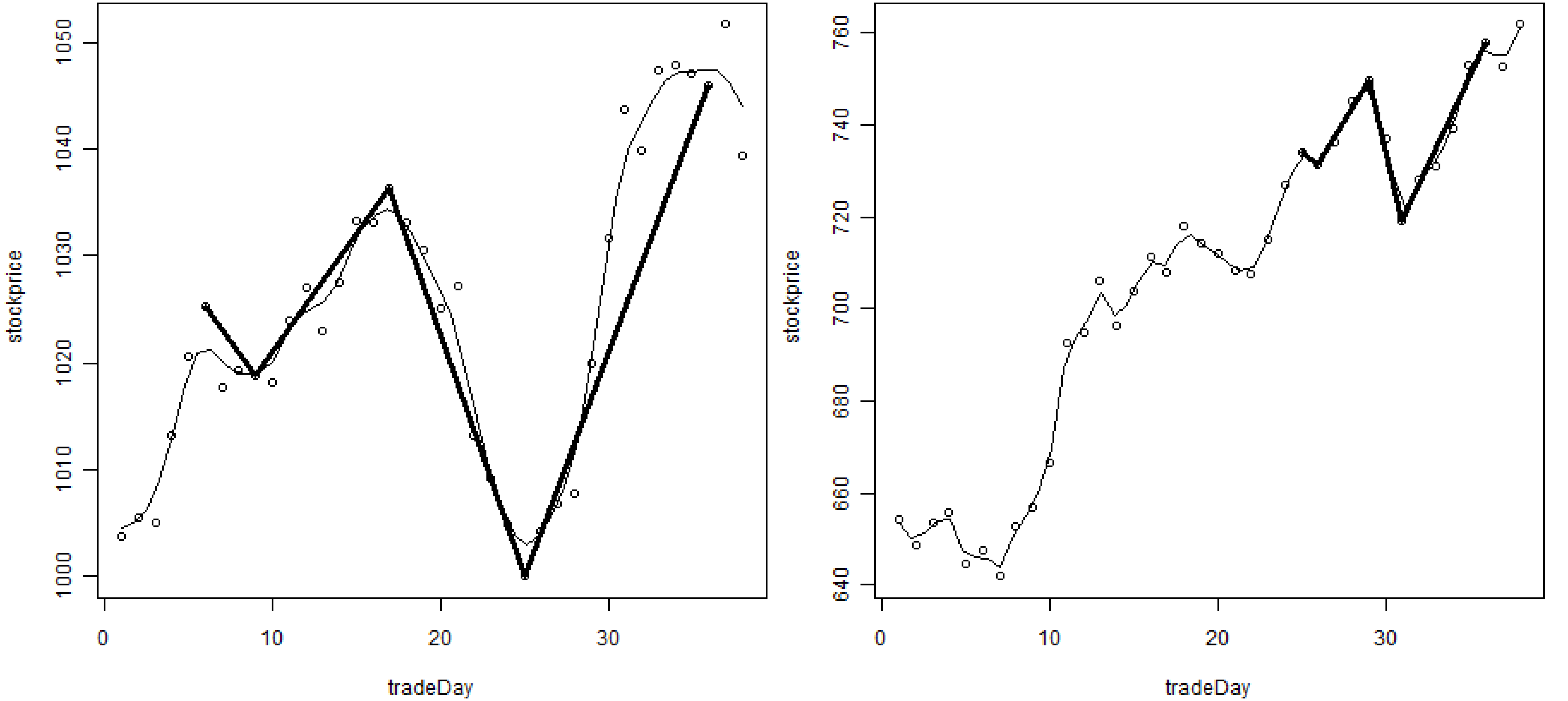


Inverted Head-and-Sholders (IHS)

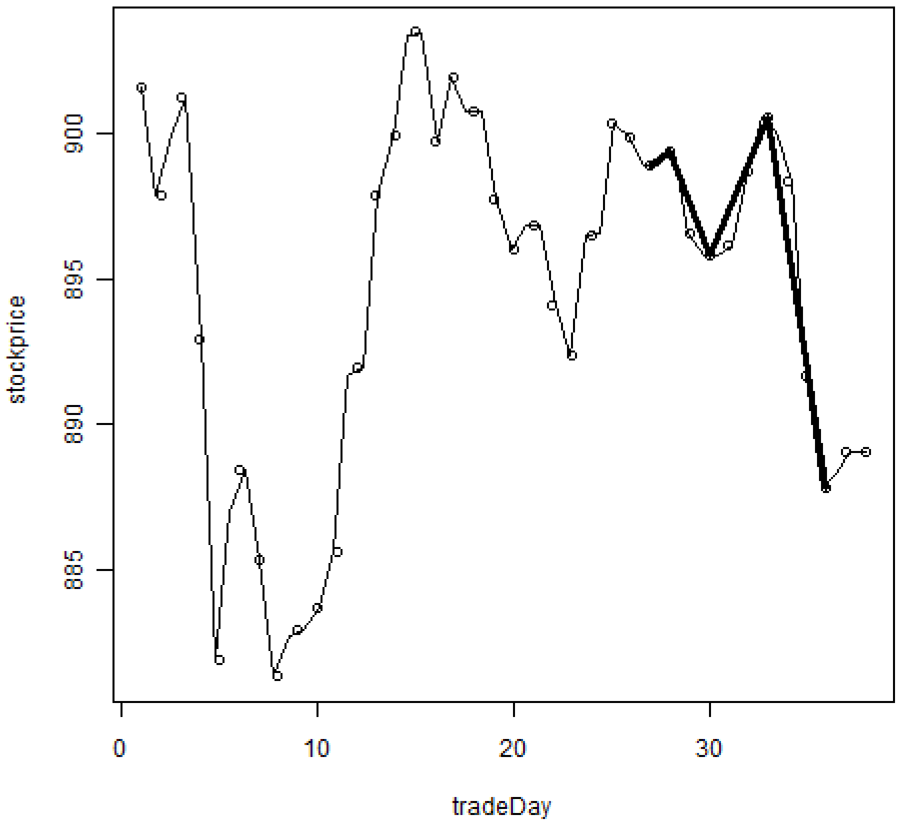


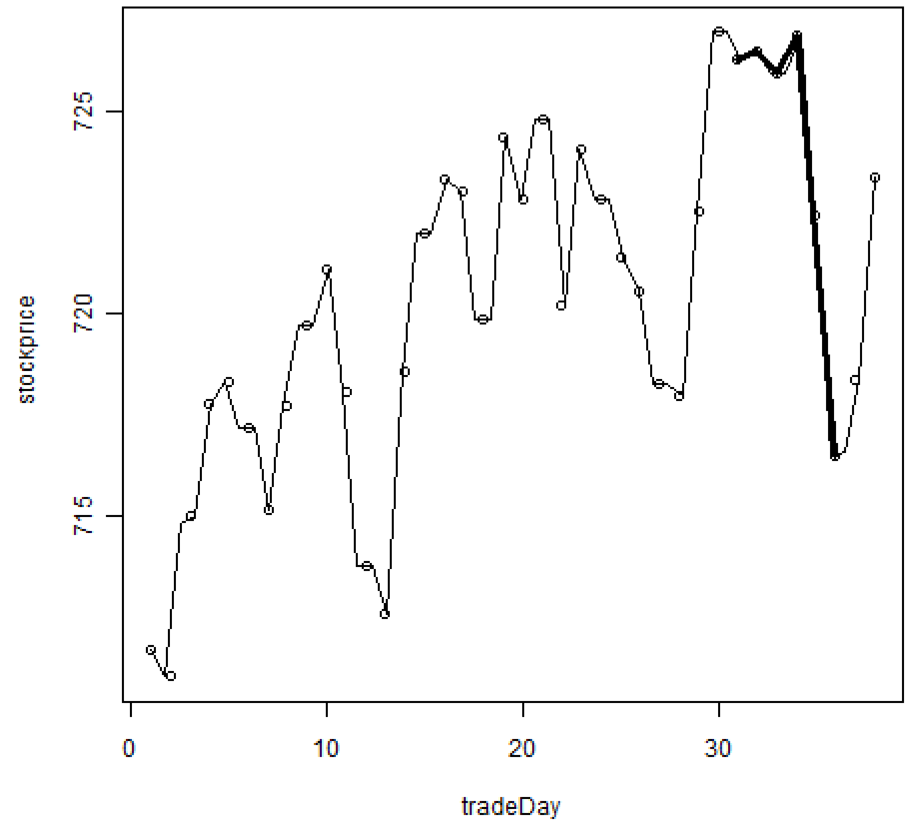


Broadening Tops (BTOP)

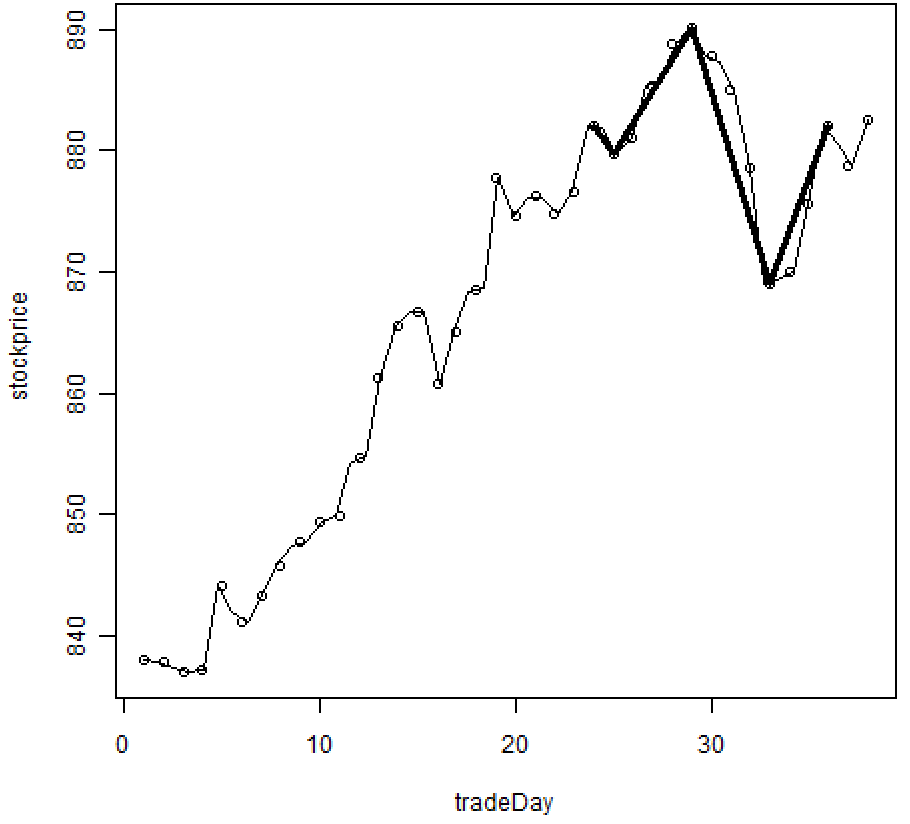


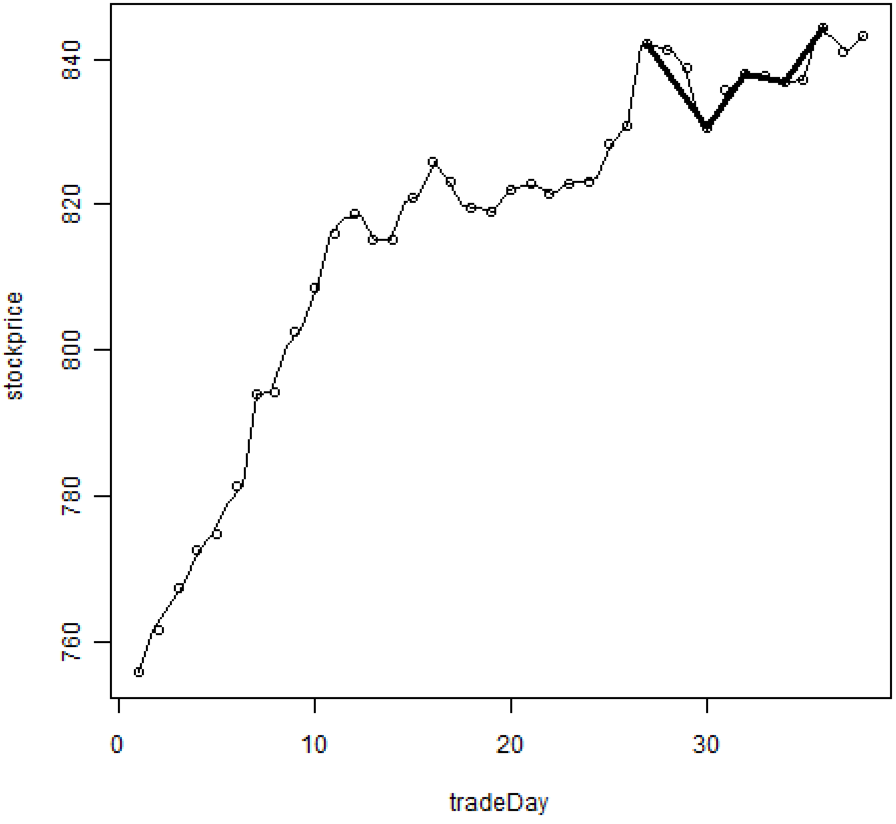
Broadening Bottoms (BBOT)



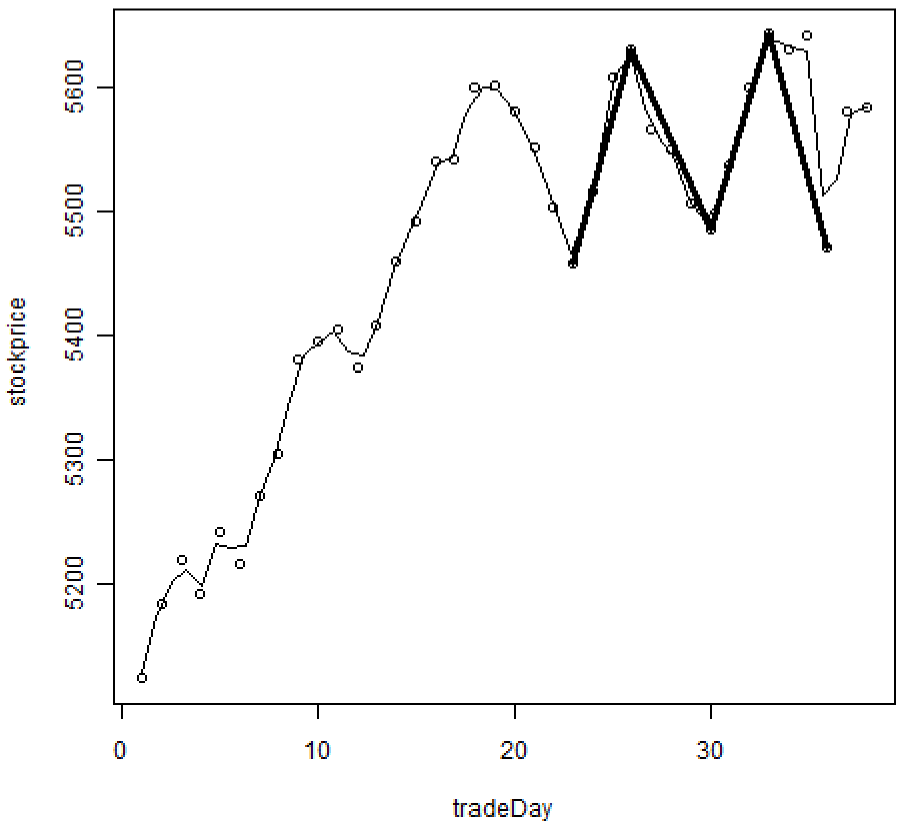


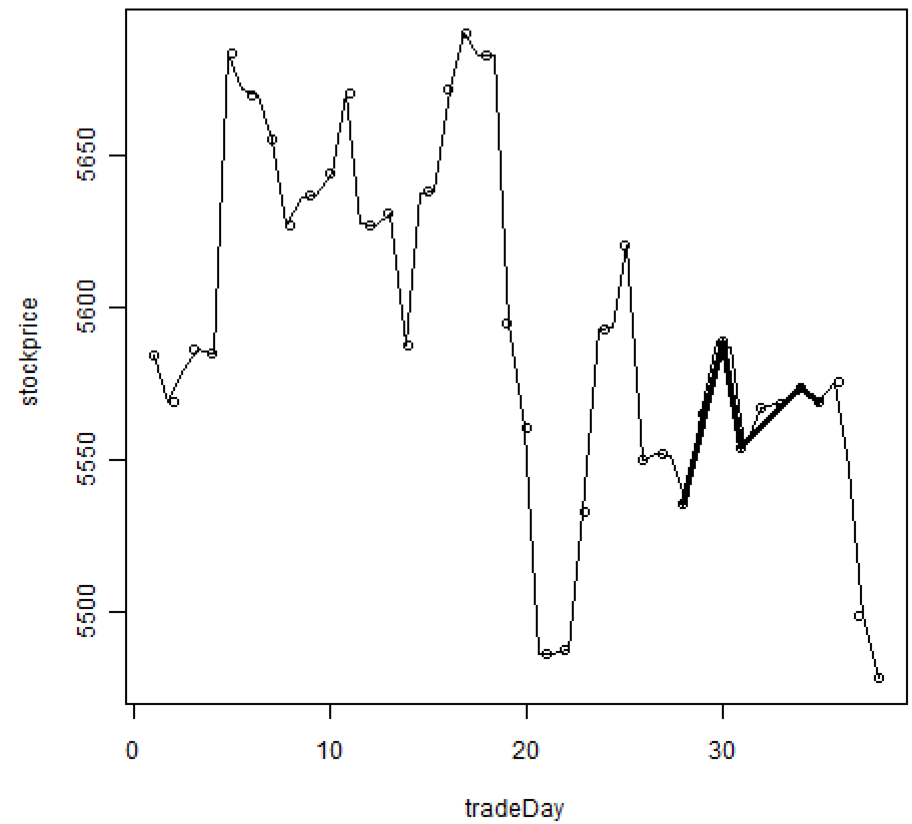
Rectangle tops (RTOP)



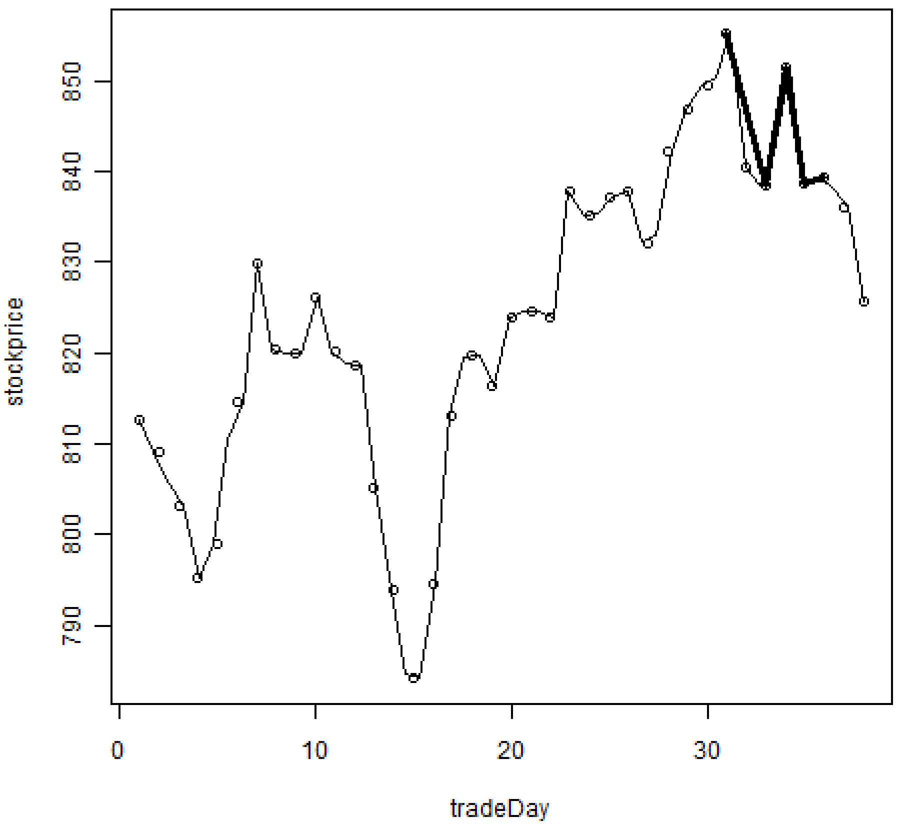


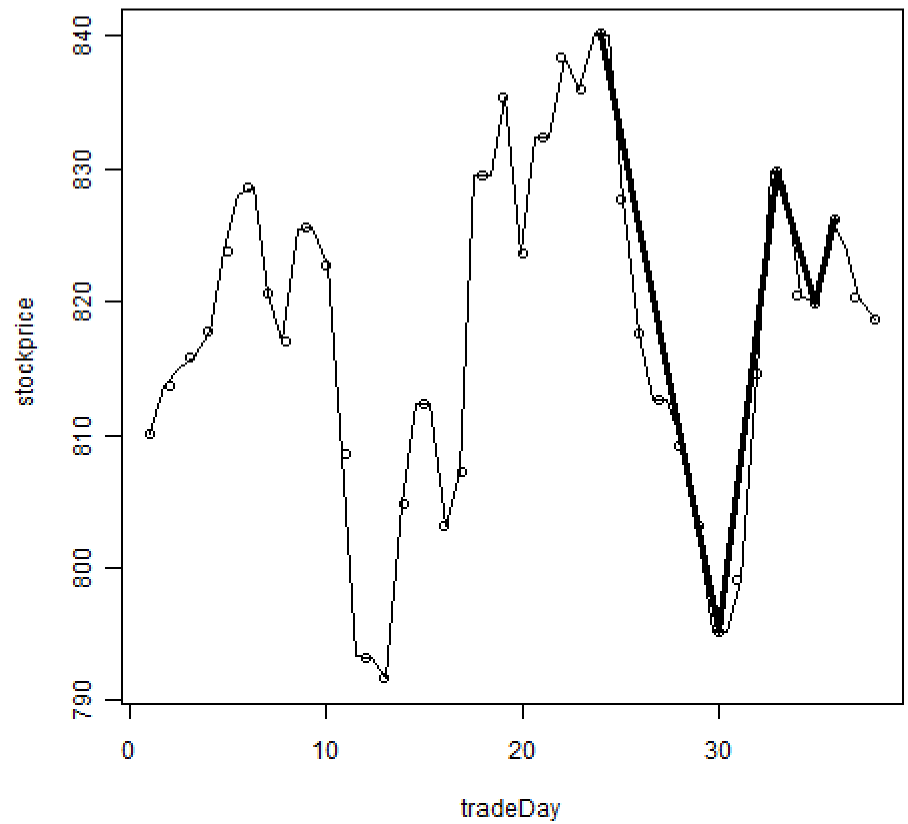
Rectangle Bottoms (RBOT)



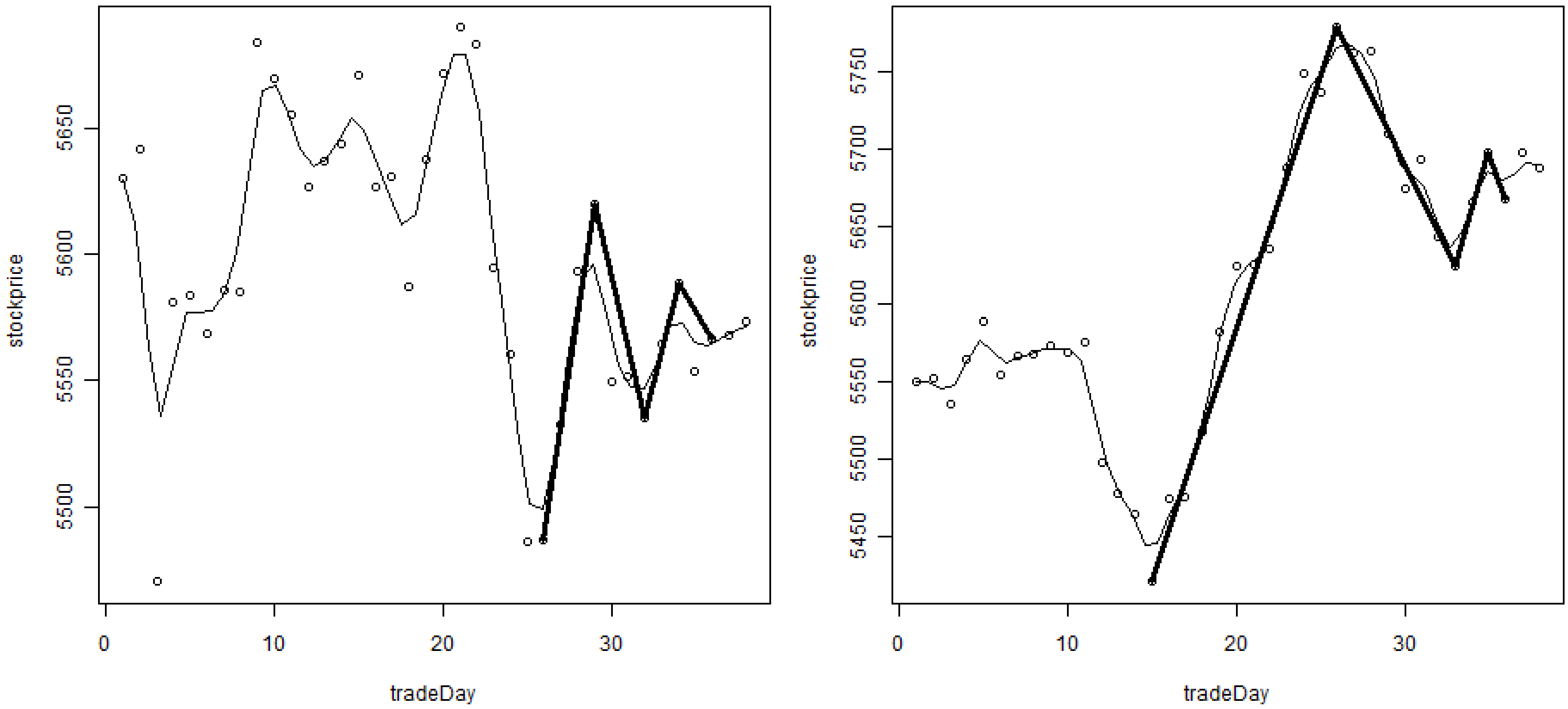


Triangle tops (TTOP)

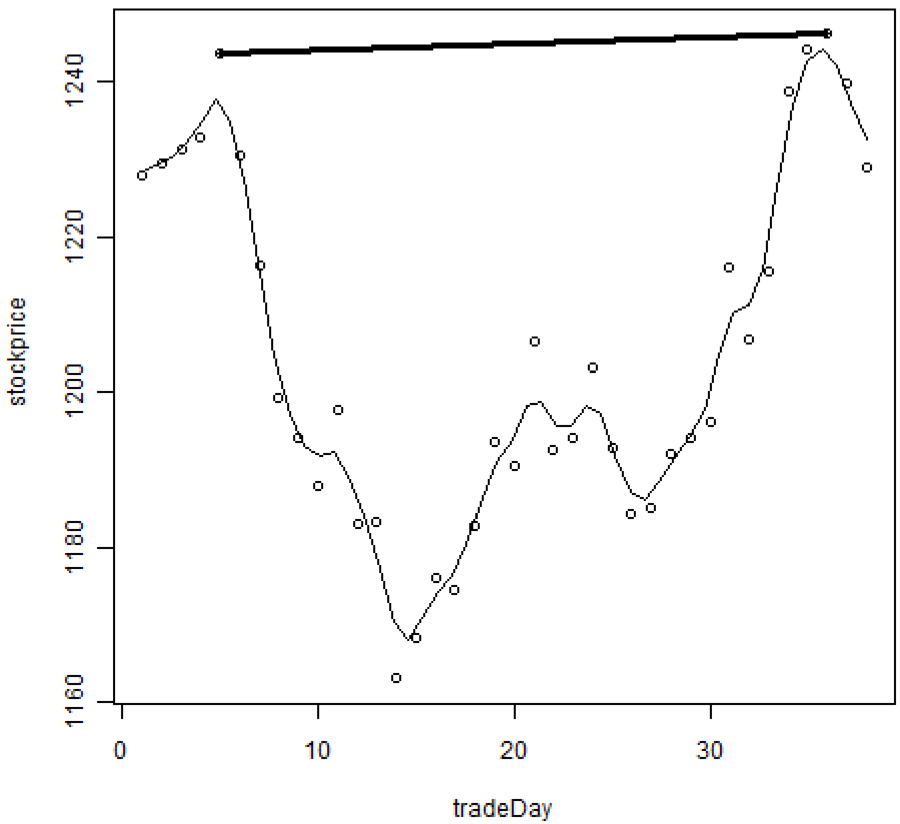


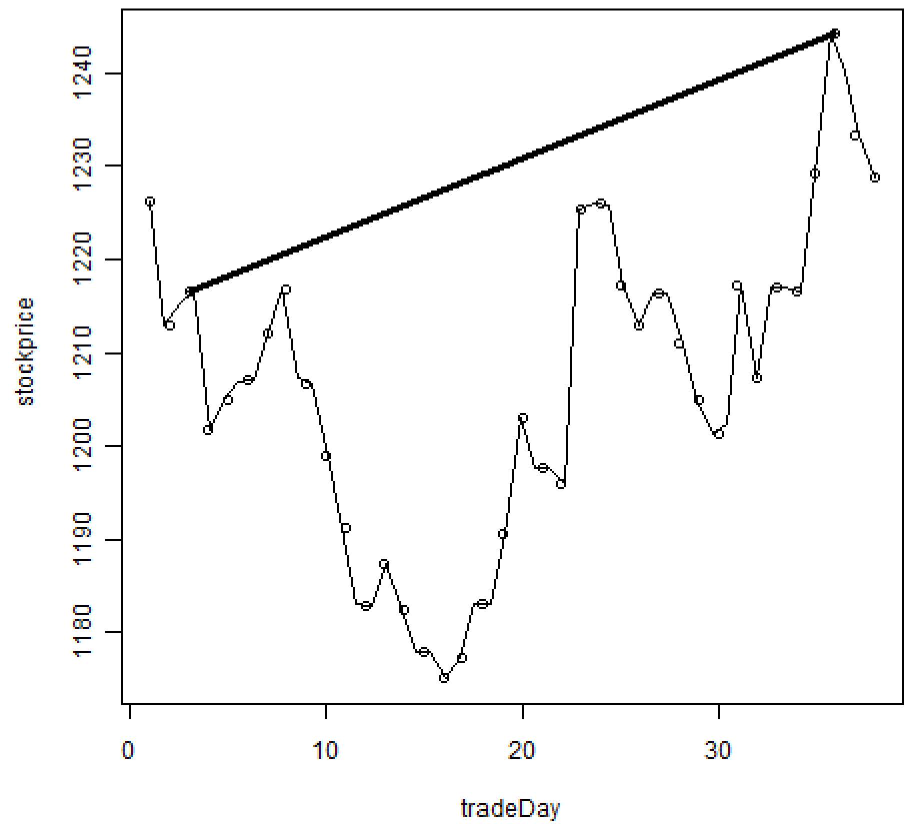


Triangle bottoms (TBOT)

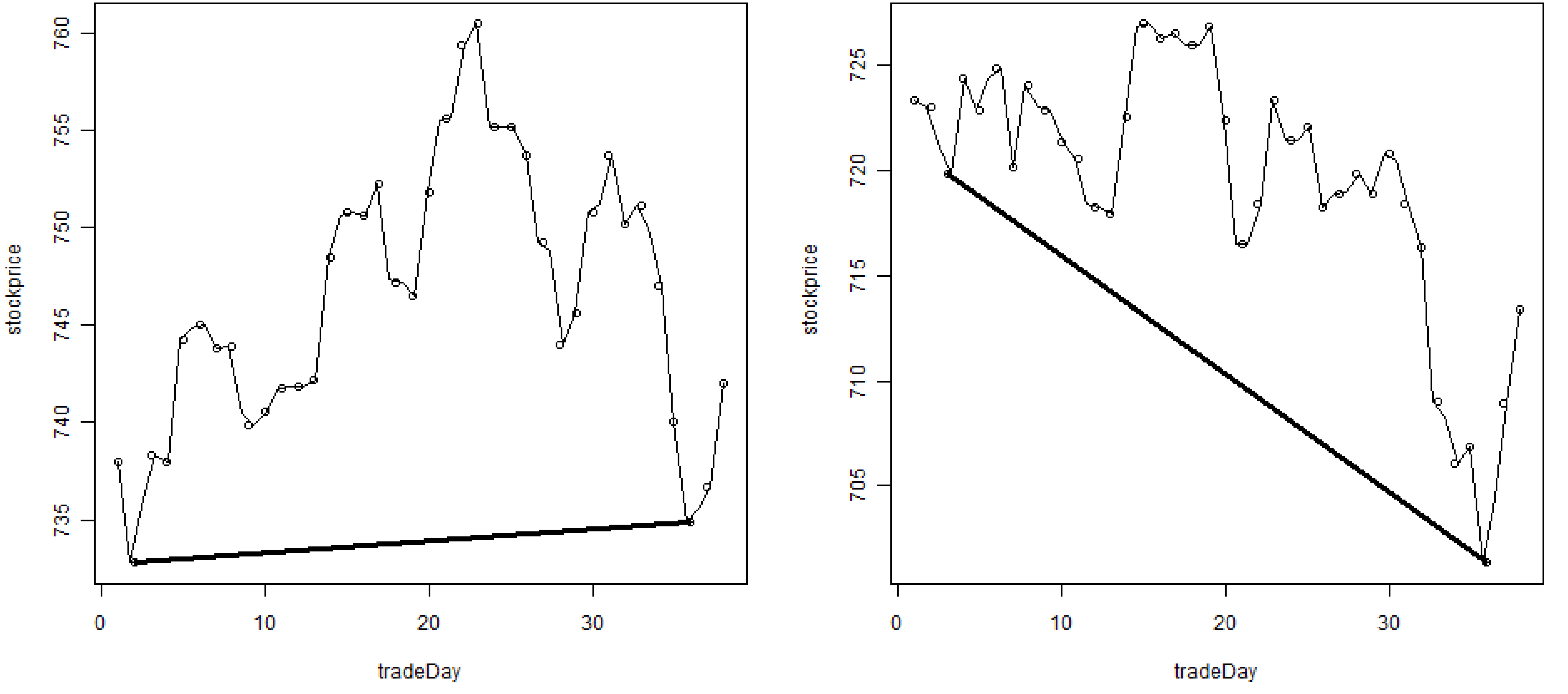


Double TOP (DTOP)





Double Bottom (DBOT)



Alle Patterns sind als Folge von lokalen Extrema Definiert

- Z.B. TTOP:
  - E1 is a maximum
  - E1 > E3 > E5
  - E2 < E4

Kann man ParStream beim Suchen nach solchen Patterns sinnvoll einsetzen?

Datenmenge ist schon groß: tausende Aktien, von Tausend bis Millionen historische Preisen für jede Aktie